Topologie algébrique
Série 9

29.04.2019

L'exercice 2 est à rendre le 06.05.2019.

1. (Produits tensoriels de complexes de chaînes)

   (a) Soient $C = (C_*, d_*)$ et $C' = (C'_*, d'_*)$ des complexes de chaînes sur $\mathbb{Z}$. Définir $C \otimes C' = \big((C \otimes C')_*, D_*\big)$ par $(C \otimes C')_n = \bigoplus_{\ell+m=n} C_\ell \otimes C'_m$ avec différentielle $D_n : (C \otimes C')_n \to (C \otimes C')_{n-1}$ donnée par
   $$D_n(c \otimes c') = d_\ell c \otimes c' + (-1)^\ell c \otimes d'_m c',$$
   pour $c \in C_\ell$ and $c' \in C'_m$. Montrer que $C \otimes C'$ est bien un complexe de chaînes.

   (b) Trouver un ensemble de modèles dans $\mathsf{Top} \times \mathsf{Top}$ par rapport auquel les deux foncteurs
   $$\big(S_*(-) \otimes S_*(-)\big)^\varepsilon : \mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \to \mathsf{Ch}^\varepsilon$$
   et
   $$S_*^\varepsilon(- \times -) : \mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \to \mathsf{Ch}^\varepsilon$$
   sont libres et acycliques. Justifier.

2. (Equivalences d'Eilenberg-Zilber et d'Alexander-Whitney)

   (a) Montrer que pour tout couple d'espaces topologiques X et Y, il existe des équivalences de chaînes naturelles et mutuellement inverses
   $$\nabla_{X,Y} : \big(S_*(X) \otimes S_*(Y)\big)^\varepsilon \to S_*^\varepsilon(X \times Y)$$
   et
   $$\tau_{X,Y} : S_*^\varepsilon(X \times Y) \to \big(S_*(X) \otimes S_*(Y)\big)^\varepsilon.$$
   En déduire que
   $$\widetilde{H}_*^{\mathrm{sing}}(X \times Y) \cong H_*\Big(\big(S_*(X) \otimes S_*(Y)\big)^\varepsilon\Big),$$
   de façon naturelle en X et Y.

(b) Montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\big(S_*(X) \otimes S_*(Y) \otimes S_*(Z)\big)^{\varepsilon} \arrow[r, "\nabla_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_{S_*(Z)}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{S_*(X)} \otimes \nabla_{Y,Z}"'] & \big(S_*(X \times Y) \otimes S_*(Z)\big)^{\varepsilon} \arrow[d, "\nabla_{X \times Y, Z}"] \\
\big(S_*X \otimes S_*(Y \times Z)\big)^{\varepsilon} \arrow[r, "\nabla_{X, Y \times Z}"] & S_*^{\varepsilon}(X \times Y \times Z)
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie de chaînes près.

3. Une *algèbre graduée* (sur $\mathbb{Z}$) consiste en une famille $A_* = \{A_n\}_{n \geq 0}$ de groupes abéliens, munie d'une famille d'homomorphismes

$$\mu_* = \{\mu_n : \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \to A_n\}_{n \geq 0}$$

et d'un homomorphisme $\eta : \mathbb{Z} \to A_0$ vérifiant *l'axiome d'unité*, i.e., les composées

$$A_n \cong A_n \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{A_n} \otimes \eta} A_n \otimes A_0 \hookrightarrow \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \xrightarrow{\mu_n} A_n$$

et

$$A_n \cong \mathbb{Z} \otimes A_n \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{Id}_{A_n}} A_0 \otimes A_n \hookrightarrow \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \xrightarrow{\mu_n} A_n$$

sont égales à l'identité pour tout $n \geq 0$, et *associativité*, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{k+\ell+m=n} A_k \otimes A_\ell \otimes A_m \arrow[r, "\bigoplus_{0 \leq m \leq n} \mu_{n-m} \otimes \mathrm{Id}_{A_m}"] \arrow[d, "\bigoplus_{0 \leq k \leq n} \mathrm{Id}_{A_k} \otimes \mu_{n-k}"'] & \bigoplus_{0 \leq m \leq n} A_{n-m} \otimes A_m \arrow[d, "\mu_n"] \\
\bigoplus_{0 \leq k \leq n} A_k \otimes A_{n-k} \arrow[r, "\mu_n"] & A_n
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \geq 0$.

Montrer que l'existence de la transformation naturelle ∇ implique que si G est un groupe topologique (i.e., l'inversion $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ et la multiplication $G \times G \to G$ sont continues), alors $H_*^{\mathrm{sing}}(G)$ est une algèbre graduée.

4. Montrer que tout espace topologique contractile est acyclique et que tout produit fini d'espaces acycliques est acyclique.