Topologie algébrique
Série 8

08.04.2019

L'exercice 2 est à rendre le 15.04.2019.

1. (Produits tensoriels de groupes abéliens) Soient $(A, +, 0)$ et $(B, +, 0)$ des groupes abéliens. Leur *produit tensoriel* est le groupe abélien

$$A \otimes B = F_{\mathrm{Ab}}(A \times B)/N,$$

où N est le sous-groupe abélien engendré par

$$\big\{(a+a', b)-(a,b)-(a',b), (a, b+b')-(a,b), -(a,b') \mid a, a' \in A \quad \text{et} \quad b, b' \in B\big\}.$$

La classe d'équivalence de (a, b) dans $A \otimes B$ est notée $a \otimes b$.

   (a) Montrer que $ma \otimes b = a \otimes mb = m(a \otimes b)\ \forall\, a \in A, b \in B, m \in \mathbb{Z}$. En déduire que $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes b\ \forall\, a \in A, b \in B$.

   (b) Prouver la *Propriété universelle du produit tensoriel*:
   Si $h : A \times B \to D$ est une application bilinéaire (i.e., D est aussi un groupe abélien, et $h(a+a', b+b') = h(a,b)+h(a,b')+h(a',b)+h(a',b')$ $\forall\, a, a' \in A, b, b' \in B$), il existe un unique homomorphisme de groupe abélien $\widehat{h} : A \otimes B \to D$ tel que $\widehat{h}(a \otimes b) = h(a,b)\ \forall\, a \in A, b \in B$.

   (c) Montrer que le produit tensoriel s'étend en un foncteur

$$- \otimes - : \mathsf{Ab} \times \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}.$$

   (d) Montrer que $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$ pour tout groupe abélien A.

   (e) Montrer que $A \otimes (\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} B_j) \cong \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} (A \otimes B_j)$ pour tout groupe abélien A et toute famille de groupes abéliens $\{B_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.

   (f) Montrer que $A \otimes B \cong B \otimes A$ pour tout couple de groupes abéliens A et B.

   (g) Calculer $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $m, n \in \mathbb{Z}$.

   (h) Calculer $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$.

2. (Homologie à coefficients) Soit A un group abélien.

   (a) Soit $C = (C_*, d_*)$ un complexe de chaînes sur $\mathbb{Z}$. Considérer la suite d'homomorphismes

   $$\cdots \to C_{n+1} \otimes A \xrightarrow{d_{n+1} \otimes \mathrm{Id}_A} C_n \otimes A \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{Id}_A} C_{n-1} \otimes A \to \cdots,$$

   notée $C \otimes A = (C_* \otimes A, d_* \otimes \mathrm{Id}_A)$. Montrer que $C \otimes A$ est aussi un complexe de chaînes.

   Astuce: Pour comprendre plus facilement le sens de cet exercice, considérer d'abord le cas où C_n est abélien libre pour tout n et appliquer 1 (d) et (e) pour écrire $d_n \otimes \mathrm{Id}_A$ explicitement en termes d'une base de C_n.

   (b) Trouver un exemple d'un complexe de chaînes C et d'un groupe abélien A tels que $H_*(C \otimes A) \ncong H_*(C) \otimes A$.

   Astuce: Il y a un exemple où C_n est abélien libre pour tout n, et $H_n C = 0$ pour tout n, mais il existe au moins un n tel que $H_n(C; A) \neq 0$. Le groupe A ne peut pas être abélien libre...

   (c) Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0, et soit C un complexe de chaînes tel que C_n soit abélien libre de génération finie pour tout n . Montrer que $H_*(C \otimes \mathbb{k}) \cong H_*(C) \otimes \mathbb{k}$.

   Astuce: Observer que si C_n est abélien libre sur un ensemble de cardinalité d, alors $C_n \otimes \mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension d.

   (d) Soit X un espace topologique, et poser $S_*(X; A) = S_*X \otimes A$. *L'homologie singulière à coefficients dans* A d'un espace topologique X est

   $$H_*^{\mathrm{sing}}(X; A) = H_*\big(S_*(X; A)\big).$$

   Montrer que toute courte suite exacte $0 \to A' \to A \to A' \to 0$ de groupes abéliens induit une longue suite exacte

   $$\cdots \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; A') \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; A) \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; A'') \to H_{n-1}^{\mathrm{sing}}(X; A') \to \cdots.$$