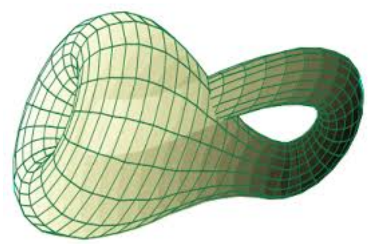
Topologie algébrique
Série 7

01.04.2019

L'exercice 2 est à rendre le 08.04.2019.

1. Utiliser l'excision simpliciale pour calculer l'homologie du tore, à partir d'un choix d'tiquettage dont la réalisations géométrique est homéomorphe au tore, relativement au sous-complexe simplicial donné par tous les 2-simplexes qui intersectent le bord de l'étiquettage. Faire la même chose pour le plan projectif.

2. La *bouteille de Klein* est un espace topologique qui est le quotient du carré I^2 par la relation $(0,t) \sim (1,t)$ pour tout $t \in I$ et $(s,0) \sim (1-s,1)$ pour tout $s \in I$. Trouver une description de la bouteille de Klein comme espace obtenu par recollement d'un étiquettage et ensuite calculer son homologie simpliciale, en faisant appel à l'excision simpliciale et à la longue suite exacte d'un couple.



(Conseil de visite: http://www.kleinbottle.com)

3. Etant donné un complexe simplicial $\mathcal{K}$ et deux sous-complexes

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K},$$

trouver une longue suite exacte qui met en relation $H_*(\mathcal{K},\mathcal{L})$, $H_*(\mathcal{K},\mathcal{M})$, et $H_*(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

4. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X. Le *nerf* de $\mathcal{U}$, noté $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, est le complexe simplicial abstrait défini par

$$\mathcal{N}(\mathcal{U})_n = \big\{\{U_0, ..., U_n\} \subset \mathcal{U} \mid \bigcap_{0\leq k\leq n} U_k \neq \emptyset\big\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ est bien un complexe simplicial abstrait.

   (b) Trouver des recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de S^1 et $\mathcal{V}$ de S^2 tels que $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{U})}| \cong S^1$ et $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{V})}| \cong S^2$. Est-ce que tout recouvrement ouvert de S^1 ou de S^2 vérifie cette propriété?

   Remarque: Le *Théorème du Nerf* dit que si $\mathcal{U}$ est fini et toute intersection d'éléments de $\mathcal{U}$ est vide ou contractile, alors il existe une application continue $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{U})}| \to X$ qui est une *équivalence faible*, i.e., qui induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie. Si X n'est pas trop pathologique (e.g., si X est un *CW-complexe* ou un polytope), alors cette application est en fait une équivalence d'homotopie.