TOPOLOGIE - QUIZ 8

Question 1. Soit X un ensemble quelconque. Quand est-il est régulier (et quand est-il normal)

(a) par rapport à la topologie du complément fini?

(b) par rapport à la topologie du complément dénombrable?

(c) par rapport à la topologie discrète?

(d) par rapport à la topologie grossière?

TOPOLOGIE - SÉRIE 9

L'exercice 2 peut être rendu pour le 1er mai 2019.

Exercice 1 (Implication inverse du Lemme d'Urysohn). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On suppose que, pour tous $A, B \subseteq X$ fermés et disjoints, il existe une application continue $f\colon (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$. Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est normal.

Exercice 2. Démontrer que le Théorème d'extension de Tietze implique le Lemme d'Urysohn.

Exercice 3. Donner une preuve directe du Lemme d'Urysohn dans le cas d'un espace métrique (X, d) en définissant $f\colon X \to [0,1]$ par

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Exercice 4. *Une application du Théorème de Tietze.*
Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 5. *Une application du Théorème de Métrisabilité d'Urysohn.*
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace compact de Hausdorff. On va montrer que, si X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.
(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.
(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Exercice 6. Dans la preuve du Théorème de Métrisabilité d'Urysohn, on a montré qu'un espace régulier $(X, \mathcal{T})$ qui admet une base dénombrable peut être plongé dans $([0,1]^{\mathbb{N}}, \star_{\mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$. Dans cet exercice, on va montrer qu'on peut également plonger $(X, \mathcal{T})$ dans $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_\rho)$, où ρ est la métrique définie par

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n - y_n|\},$$

pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Procéder de la même manière, mais en supposant de plus que $f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ (en divisant par exemple chaque fonction f_n par n).

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

(a) On dit que $(X, \mathcal{T})$ satisfait le **deuxième axiome de dénombrabilité** si $\mathcal{T}$ admet une base dénombrable.
(b) On dit que $(X, \mathcal{T})$ est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dense et dénombrable, i.e. s'il existe un sous-ensemble $D \subseteq X$ dénombrable tel que $\overline{D} = X$.

Exercice 7. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$ (sauf la topologie du complément dénombrable), quand est-ce qu'il satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité? Et quand est-il séparable?

Date: 15 avril 2019

Exercice 8. Comment est-ce que le deuxième axiome de dénombrabilité se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les enoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi. Et si f est aussi ouverte?

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ admet une base dénombrable, et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable et $A \subseteq X$, alors A muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ en admet une aussi.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ en admet une aussi.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont des espaces topologiques admettent une base dénombrable, alors $X \times X'$ muni de la topologie produit en admet une aussi.

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/\sim$ muni de la topologie quotient en admet une aussi.

Exercice 9.

(a) Montrer qu'un espace métrisable et séparable admet une base dénombrable.

(b) Conclure que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ n'est pas métrisable (alors qu'il est normal!).