TOPOLOGIE - QUIZ 6

Question 1. Vrai ou Faux?

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X, alors A muni de la topologie de sous-espace est compact aussi.

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont des espaces topologiques compacts, alors $X \times X'$ muni de la topologie produit est aussi compact.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ est compact

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi compact.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi compact.

Question 2. D'une manière informelle, décrire

(a) la lettre "O" comme un quotient d'un intervalle fermé.

(b) la lettre "O" comme un quotient d'une réunion disjointe de deux intervalles fermés.

(c) la lettre "O" comme un quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 7

L'exercice 2 peut être rendu pour le 10 avril 2019.

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 1. ($\star$) En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i \in I}$ est non-vide (i.e. **l'axiome du choix**).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i \in I}$.

Définition. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ **satisfait l'axiome** T_1 si, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est fermé dans X. Montrer que c'est équivalent à dire que, pour tout $x, y \in X$, il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ qui contient x, mais pas y. En particulier, si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, il satisfait l'axiome T_1.

Remarque. Voici une description très utile pour les ouverts de la topologie quotient. Si X est un espace topologique et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors pour U ouvert dans $X/_\sim$ il existe un ouvert V de X tel que $\pi(V) = U$ et

$$\text{si } y \in V \text{ et } y' \sim y \text{ alors } y' \in V.$$

Exercice 2. Montrer que

(a) l'espace $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ modulo la relation d'équivalence $\sim$, engendrée par

$$(a, x) \sim (b, y) \text{ si et seulement si } x = y \in [0, 1],$$

est homéomorphe à la lettre "Y" plongée dans $\mathbb{R}^2$, et il est donc métrisable.

(b) l'espace $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ modulo la relation d'équivalence $\sim$, engendrée par

$$(a, x) \sim (b, y) \text{ si et seulement si } x = y \in (0, 1],$$

est T_1 mais il n'est pas de Hausdorff.

Exercice 3. Montrer ou réfuter que

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X, alors le sous-espace A est de Hausdorff aussi.

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T})$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, alors le produit $X \times X'$ est aussi de Hausdorff.

(c) Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, où I est un ensemble quelconque, alors le produit $\prod_{i \in I} X_i$ est aussi de Hausdorff.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, alors le quotient $X/_\sim$ est aussi de Hausdorff.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

Date: 2 avril 2019

Exercice 4. Pour les topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que

(a) $\mathbb{R}$ satisfait l'axiome T_1?

(b) $\mathbb{R}$ est un espace de Hausdorff?

(c) la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Vers quoi?

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $D \subseteq X$ est **dense** par rapport à $\mathcal{T}$ si, pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$, il existe un élément $d \in D$ tel que $d \in U$.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y, \mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

(b) Pour $(Y, \mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D \subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Exercice 6. Soit R un anneau intègre. On considère la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}(R)$ définie à l'exercice 8 série 6.

(a) Soit P un idéal premier dans R. Calculer l'adhérence $\overline{\{P\}}$ dans $\mathrm{Spec}(R)$.

(b) Montrer que $\mathrm{Spec}(R)$ muni de la topologie de Zariski n'est pas de Hausdorff.

(c) On pose $R = \mathbb{Z}$. Décrire tous les points de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Donner explicitement l'adhérence des singletons $\{P\}$ pour chaque $P \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

(d) On pose $R = k[X]$, pour k un corps. Décrire tous les points de $\mathrm{Spec}(k[X])$. Donner explicitement l'adhérence des singletons $\{P\}$ pour chaque $P \in \mathrm{Spec}(k[X])$.