TOPOLOGIE - QUIZ 9

Question 1. Petites révisions... Compléter le tableau. On pose X un ensemble quelconque et J un ensemble indénombrable.

Espaces	T_1	Hausdorff	Régulier	Normal	Base dénombrable	Métrisable
$(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$						
$(X, \mathcal{T}_{\text{gr}})$						
$(X, \mathcal{T}_{\text{fin}})$						
$(X, \mathcal{T}_{\text{dén}})$						
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sup}})$						
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$						
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{K})$						
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$						
$(\mathbb{R}^2, \star_2 \mathcal{T}_{\limsup})$						
$(\mathbb{R}^n, \star_n \mathcal{T}_{\text{st}})$						
$(\mathbb{R}^\omega, \star_\omega \mathcal{T}_{\text{st}})$						
$(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\overline{\rho}})$						
$(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\text{box}})$				?		
$(\mathbb{R}^J, \star_J \mathcal{T}_{\text{st}})$						

TOPOLOGIE - SÉRIE 10

L'exercice 2 peut être rendu pour le 8 mai 2019.

Exercice 1. Montrer que être connexe par arcs est une propriété topologique.

Exercice 2. Démontrer que $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas homéomorphe à $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 3. Comment est-ce que la connexité (par arcs) se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ l'est aussi.

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ l'est aussi.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $A \subseteq X$ un sous-espace, alors A l'est aussi.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq X$ est connexe (par arcs), alors $\overline{A}$ l'est aussi.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont connexes (par arcs), alors $(X \times X', \mathcal{T} \star \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(h) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles tels que $X = A \cup B$. Si A et B sont connexes (par arcs), alors X l'est aussi. Et si $A \cap B \neq \varnothing$?

(i) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles. Si A et B sont connexes (par arcs), alors $A \cap B$ l'est aussi.

(j) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_{\sim}$ l'est aussi.

Exercice 4. (a) Est-ce qu'un ensemble fini est connexe par arcs par rapport à la topologie du complément fini?

(b) Est-ce que $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à la topologie du complément fini? Et par rapport à la topologie du complément dénombrable? *Indication: Utiliser que $\mathbb{Q} \cap I$ est dense dans I et dénombrable pour montrer que chaque arc dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dén})$ est nécessairement constant.*

Exercice 5. Voici deux applications du Théorème de la valeur intermediaire.

(a) Soit $g\colon (S^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ une application continue.
- Considérer l'application $G\colon (S^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$, $x \mapsto g(x) - g(-x)$. Que peut-on dire sur sa continuité?
- Montrer qu'il existe un $x \in S^1$ tel que $g(x) = g(-x)$.

(b) Soit $f\colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]}) \to ([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]})$ une application continue.
- Considérer l'application graphe $F\colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$, $x \mapsto (x, f(x))$. Que peut-on dire sur sa continuité? Et sur la continuité de $G(x) := f(x) - x$?
- Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Date: 29 avril 2019