TOPOLOGIE - SÉRIE 8

L'exercice 3 peut être rendu pour le 17 avril 2019.

Exercice 1. (*) Montrer que le cube de Hilbert $X = \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ muni de la topologie produit est homéomorphe à l'espace métrique $X' = \prod_{\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n}]$ muni de la topologie induite de la distance $d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \quad \forall x, y \in X'$.

Preuve. Considère l'application $f : X' \to X$ donnée par $f(x_k) = kx_k$. Comme f est une application bijective, X est de Hausdorff et X' est compact, il suffit de montrer que f est continue pour conclure que c'est un homéomorphisme. Soit

$$U := (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \ldots \times (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) \times [0,1] \times [0,1] \ldots$$

un ouvert dans X. Alors $f^{-1}(U)$ est de la forme

$$(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \ldots \times (\frac{a_k}{k} - \frac{\varepsilon}{k}, \frac{a_k}{k} + \frac{\varepsilon}{k}) \times [0, \frac{1}{k+1}] \times [0, \frac{1}{k+2}] \ldots .$$

On va montrer qu'il est ouvert, i.e. si $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $f^{-1}(U)$, alors il existe $d > 0$ tel que $B(x,d) \subset f^{-1}(U)$. Il suffit de choisir $d \leqslant \min_{n \leqslant k}\{|x_n - \frac{a_n}{n} \pm \frac{\varepsilon}{n}|\}$.

Exercice 2. Montrer que

(a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ est T_1 (tout singleton est fermé), mais n'est pas de Hausdorff.

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est Hausdorff à base dénombrable, mais n'est pas régulier.

(c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ est normal.

Solution.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le singleton $\{x\}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{fin}}$, car fini. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ est T_1. Soit $x \neq y \in \mathbb{R}$ et soit $U, V \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$ tels que $x \in U$ et $y \in V$. Par définition, il existe $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{et} \quad V = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

Si $U \cap V = \varnothing$, alors $\mathbb{R} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ est fini, ce qui est absurde. Donc $U \cap V \neq \varnothing$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ n'est pas de Hausdorff.

(b) L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est de Hausdorff, car $\mathcal{T}_{\text{st}} \subseteq \mathcal{T}_K$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ est de Hausdorff. On sait que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ est à base dénombrable. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$. On pose

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Alors $\mathcal{B}'$ est une base dénombrable de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ (à vérifier!).
Par définition de la topologie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$, l'ensemble K est fermé. On montre qu'on ne peut pas séparer 0 et K. Soit $U, V \in \mathcal{T}_K$ tels que $0 \in U$ et $K \subseteq V$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K \subseteq U$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Comme $\frac{1}{n} \in K \subseteq V$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{n} \in \,]a, b[\subseteq V$. Mais alors

$$\varnothing \neq (]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K) \cap \,]a, b[\subseteq U \cap V.$$

On en déduit que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ n'est pas régulier.

Date: 8 avril 2019

(c) Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux fermés par rapport à $\mathcal{T}_{\limsup}$ tels que $A \cap B = \varnothing$. On pose

$$X_a := \{x \in \mathbb{R} \mid]x, a] \cap B = \varnothing\}$$

pour $a \in A$ et

$$Y_b := \{y \in \mathbb{R} \mid]y, b] \cap A = \varnothing\}$$

pour $b \in B$. Ces ensembles sont non vides, car, si $a \in A \subseteq X \setminus B$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $]x, a] \subseteq X \setminus B$ (car $X \setminus B$ est ouvert) et de même pour $b \in B$. Alors

$$A \subseteq U := \bigcup_{a \in A} \bigcup_{x \in X_a}]x, a] \qquad \text{et} \qquad B \subseteq V := \bigcup_{b \in B} \bigcup_{y \in Y_b}]y, b]$$

et les ensembles U et V sont des ouverts disjoints. En effet, si on a $z \in U \cap V$, il existe $a \in A$, $x \in X_a$, $b \in B$ et $y \in Y_b$ tels que $z \in]x, a] \cap]y, b]$. Ainsi $a \in]y, b]$, ce qui contredit la définition de X_b. □

Exercice 3. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce qu'il est régulier? Et normal?

Solution.

(a) Lorsque l'espace $\mathbb{R}$ est muni de la topologie grossière, supérieure, du complément fini et du complément dénombrable, il n'est pas de Hausdorff. Donc il n'est ni régulier ni normal.

(b) Lorsque l'espace $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard ou discrète, il est métrisable. Donc il est normal et régulier.

(c) Lorsque l'espace $\mathbb{R}$ est muni de la topologie $\mathcal{T}_K$, il n'est pas régulier (par l'Exercice 2 (b)) et donc pas normal non plus.

(d) Lorsque l'espace $\mathbb{R}$ est muni de la topologie de la limite supérieure, il est normal (par l'Exercice 2 (c)) et donc également régulier. □

Exercice 4. On définit les éléments suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$a_{m,n} = (\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}),\ m, n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_m = (\tfrac{1}{m}, 0),\ m \in \mathbb{N}^*, \qquad p = (0, 0).$$

Posons

$$X = \left(\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^*} \{a_{m,n}\}\right) \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \{x_m\}\right) \cup \{p\}.$$

On définit une base de topologie $\mathcal{B}$ sur X comme le sous-ensemble des parties de X contenant:

- les singletons $\{a_{n,m}\}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$;
- les ensembles $B_n(x_m) := \{x_m\} \cup \{a_{m,k} \mid k \geqslant n\}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$;
- les ensembles $B_n(p) := \{p\} \cup \bigcup_{m \geqslant n} \{a_{m,k} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On va montrer que X est un exemple d'espace topologique à base dénombrable et de Hausdorff qui n'est pas métrisable.

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ définit bien une base de topologie sur X. On peut alors munir X de la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

(b) Vérifier que X est à base dénombrable.

(c) Montrer que X est de Hausdorff.

(d) Montrer que $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ est un sous-espace fermé de X.

(e) Montrer que X n'est pas régulier. En déduire que X n'est pas métrisable.

Solution.

(a) Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ définit une base de topologie.

(b) On a que

$$\mathcal{B} = \{\{a_{m,n}\} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{B_n(x_m) \mid m, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{B_n(p) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de X.

(c) Pour tous $x \neq y \in X$, on montre qu'il existe deux ouverts disjoints $U, V \in \mathcal{B}$ tels que $x \in U$ et $y \in V$.
Pour $x = a_{m,n}$ et $y = a_{r,s}$ avec $(m, n) \neq (r, s)$, on pose $U = \{a_{m,n}\}$ et $V = \{a_{r,s}\}$.
Pour $x = a_{m,n}$ et $y = x_r$, on choisit $N > n$ et on pose $U = \{a_{m,n}\}$ et $V = B_N(x_r)$.
Pour $x = a_{m,n}$ et $y = p$, on choisit $M > m$ et on pose $U = \{a_{m,n}\}$ et $V = B_M(p)$.
Pour $x = x_m$ et $y = x_r$ avec $m \neq r$, on choisit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $U = B_n(x_m)$ et $V = B_n(x_r)$.
Pour $x = x_m$ et $y = p$, on choisit $M > m$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $U = B_n(x_m)$ et $V = B_M(p)$.
Alors X est bien un espace topologique de Hausdorff.

(d) On note $F = \{x_m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$. On a que

$$X \setminus F = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^*} \{a_{m,n}\} \cup \{p\}.$$

Or, pour chaque $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a $\{a_{m,n}\} \subseteq X \setminus F$ et $B_n(p) \subseteq X \setminus F$, où $\{a_{m,n}\}$ et $B_n(p)$ sont des voisinages ouverts de $a_{m,n}$ et p respectivement. Donc $X \setminus F$ est ouvert et F est fermé.

(e) On va montrer que p et F ne sont pas séparables. Soit U, V des ouverts de X tels que $F \subseteq U$ et $p \in V$. Alors il existe une suite $\{n_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers telle que

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} B_{n_m}(x_m) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} (\{x_m\} \cup \{a_{m,k} \mid k \geqslant n_m\}) \subseteq U$$

et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$B_N(p) = \{p\} \cup \bigcup_{m \geqslant N} \{a_{m,k} \mid k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq V.$$

Mais

$$\varnothing \neq \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} B_{n_m}(x_m) \cap B_N(p) \subseteq U \cap V.$$

Ainsi X n'est pas régulier. Comme tout espace métrisable est régulier, en particulier X n'est pas métrisable. □

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est normal et A est un fermé de X, alors $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi normal.

(b) si $\mathcal{T}$ est la topologie cofinie sur X, alors $(X, \mathcal{T})$ est régulier si et seulement s'il est normal.

Preuve.

(a) Soit $F, G \subseteq A$ des fermés disjoints de $(A, \mathcal{T}_A)$. Il existe des fermés F', G' de $(X, \mathcal{T})$ tels que $F = F' \cap A$ et $G = G' \cap A$. Alors F, G sont des fermés de $(X, \mathcal{T})$, puisque A est fermé. Comme $(X, \mathcal{T})$ est normal, il existe deux ouverts disjoints $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $F \subseteq U$ et $G \subseteq V$. Finalement, $U \cap A$ et $V \cap A$ sont deux ouverts disjoints de $(A, \mathcal{T}_A)$ tels que $F \subseteq U \cap A$ et $G \subseteq V \cap A$.

(b) Il a été vu en cours qu'un espace normal est régulier. Supposons donc que X soit régulier et montrons que cela implique que X est normal.
Soit $A, B \subseteq X$ deux fermés, alors A, B sont finis. On écrit

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Comme X est régulier et B est fermé, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe des ouverts disjoints U_i, V_i tels que $a_i \in U_i$ et $B \subseteq V_i$. Alors

$$A \subseteq U := \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \text{et} \quad B \subseteq V := \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

où U, V sont des fermés disjoints. En effet, si $x \in U \cap V$, alors il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $x \in U_i$. Or, par définition de V, on a aussi $x \in V_i$, ce qui est absurde vu que $U_i \cap V_i = \varnothing$. On conclut que X est normal.

Exercice 6. Soit J un ensemble indénombrable. On va montrer que $\mathbb{R}^J$ muni de la topologie produit $\star_J \mathcal{T}_{\text{st}}$ n'est pas normal. Posons $X = (\mathbb{N}^*)^J$. Alors X est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^J$ et il suffit donc de montrer que X n'est pas normal (Exercice 5 (a)). On regarde les éléments $x \in X$ comme des fonctions $x \colon J \to \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $x \in X$ et $B \subset J$ un sous-ensemble fini. On pose

$$U(x, B) := \{y \in X \mid y(\alpha) = x(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in B\}.$$

Montrer que les ensembles $U(x, B)$ forment une base de X.

(b) On définit P_n comme le sous-ensemble de X contenant les fonctions $x \in X$ qui sont injectives sur $J \setminus x^{-1}(n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_1 et P_2 sont fermés et disjoints.

(c) Soit U, V deux ouverts de X tels que $P_1 \subseteq U$ et $P_2 \subseteq V$. Montrer qu'il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de J et une suite $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ d'entiers telles que, si on définit

$$B_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i}\}$$

et $x_i \in X$ par les équations

$$\begin{aligned} x_i(\alpha_j) &= j \quad && \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n_{i-1} \\ x_i(\alpha) &= 1 \quad && \text{pour tout } \alpha \notin B_{i-1}, \end{aligned}$$

pour chaque $i \geqslant 1$, alors $U(x_i, B_i) \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
Indication: Remarquer que $x_1(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in J$ et trouver $B_1 \subset J$ fini tel que $U(x_1, B_1) \subseteq U$. Procéder par récurrence.

(d) Soit $A = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ construit en (c). On définit $y \in X$ par les équations

$$\begin{aligned} y(\alpha_j) &= j \quad \text{pour tout } \alpha_j \in A \\ y(\alpha) &= 2 \quad \text{pour tout } \alpha \notin A. \end{aligned}$$

Trouver $B \subset J$ fini tel que $U(y, B) \subseteq V$ et $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $B \cap A \subseteq B_i$. Montrer que

$$U(x_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(y, B)$$

est non vide. En déduire que $U \cap V$ est non vide et que X n'est pas normal.

Solution.

(a) Il est facile de vérifier que l'ensemble des $U(x, B)$ satisfait les axiomes d'une base de topologie. Il reste à montrer que la topologie engendrée par cette base est bien la topologie produit sur X. Soit V un ouvert de la base de la topologie produit. Alors $V = \prod_J V_\alpha$, où $A = \{\alpha \in J \mid V_\alpha \neq \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble fini. Soit $x \in V$. Alors on a que $U(x, A) \subseteq V$. Ainsi la base formée des $U(x, B)$ engendre bien la topologie produit sur X.

(b) Si $x \in P_1 \cap P_2$, alors $x \in P_1$ et la restriction de x à $J \setminus x^{-1}(1)$ est injective. En particulier, il existe au plus un élément envoyé sur 2 par x, i.e. $|x^{-1}(2)| \leqslant 1$. Comme $x \in P_2$, la restriction de x à $J \setminus x^{-1}(2)$ est également injective et donc on doit avoir que l'ensemble $J \setminus x^{-1}(2)$ est dénombrable (car l'image de x est contenue dans $\mathbb{N}^*$), ce qui est absurde puisque J est indénombrable et $x^{-1}(2)$ est fini. Ainsi $P_1 \cap P_2 = \varnothing$.
On montre encore que P_n est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in X \setminus P_n$. Alors il existe $\alpha, \beta \in J \setminus x^{-1}(n)$ tels que $x(\alpha) = x(\beta)$. Il s'en suit que $U(x, \{\alpha, \beta\}) \subseteq X \setminus P_n$, ce qui prouve que $X \setminus P_n$ est ouvert.
Donc P_1 et P_2 sont bien des fermés disjoints.

(c) Comme $x_1(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in J$, on a que $x_1 \in P_1 \subseteq U$. Comme U est ouvert, il existe un ensemble fini $B_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}\} \subset J$ tel que $U(x_1, B_1) \subseteq U$.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'on ait définit $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_i$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i} \in J$ tels que $U(x_j, B_j) \subseteq U$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$. On a que $x_{i+1} \in X$ est défini par les équations

$$\begin{aligned} x_{i+1}(\alpha_j) &= j \quad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n_i \\ x_{i+1}(\alpha) &= 1 \quad \text{pour tout } \alpha \notin B_i. \end{aligned}$$

En particulier, on a que $x_{i+1} \in P_1 \subseteq U$ et il existe $B'_{i+1} \subset J$ fini tel que $U(x_{i+1}, B'_{i+1}) \subseteq U$. On pose $B_{i+1} = B_i \cup B'_{i+1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_{i+1}}\} \subset J$. Alors

$$U(x_{i+1}, B_{i+1}) \subseteq U(x_{i+1}, B'_{i+1}) \subseteq U.$$

(Remarque: quitte à rajouter un indice, on peut supposer que $B_1 \neq \varnothing$ et $B_i \subsetneq B_{i+1}$.)

(d) On remaque d'abord que $y \in P_2 \subseteq V$. Donc il existe $B \subset J$ fini tel que $U(y, B) \subseteq V$. De plus, comme

$$B \cap A = B \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i$$

et B est fini, il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $B \cap A \subseteq B_i$. On montre que

$$U(x_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(y, B) \neq \varnothing.$$

Comme $x_{i+1}(\alpha_j) = j = y(\alpha_j)$ pour tout $\alpha_j \in B_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\}$ et $B \cap B_{i+1} \subseteq B \cap A \subseteq B_i$, si on définit $z \in X$ par les équations

$$\begin{aligned} z(\alpha_j) &= j \quad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n_i \\ z(\alpha_j) &= 1 \quad \text{pour tout } n_i < j \leqslant n_{i+1} \\ z(\alpha) &= 2 \quad \text{pour tout } \alpha \notin B_{i+1}, \end{aligned}$$

alors $z \in U(x_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(y, B)$. On en déduit que $U \cap V \neq \varnothing$ et ainsi que X n'est pas normal. $\square$

Exercice 7. Comment est-ce que les propriétés de séparation se comportent par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les enoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ est régulier (resp. normal).

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ est régulier (resp. normal).

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $A \subseteq X$, alors A est régulier (resp. normal).

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal).

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal).

(f) Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques réguliers (resp. normaux), alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est régulier (resp. normal). Et si le produit est fini?

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_\sim$ est régulier (resp. normal).

Solution.

(a) *NON.* Considérons l'application $\mathrm{Id}_\mathbb{R} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$. L'image n'est pas un espace régulier (et n'est donc pas normal), alors que le domaine est normal (donc régulier).

(b) *NON.* Considérons l'application $\mathrm{Id}_\mathbb{R} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_K) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$. La préimage n'est pas un espace régulier (donc pas normal), alors que le codomaine est normal (donc régulier).

(c) *OUI pour la régularité.* On a vu dans le cours qu'un sous-espace d'un espace régulier est toujours régulier.
NON pour la normalité. Comme un produit d'espaces compacts est compact et un produit d'espaces de Hausdorff est de Hausdorff, on a que le produit $\prod_\mathbb{R} [0, 1]$ est compact et de Hausdorff. Par un théorème du cours, cela implique qu'il est normal. Or, par l'Exercice 6, on a que le produit $\prod_\mathbb{R}]0, 1[$ n'est pas normal, puisque qu'il est homéormorphe au produit $\prod_\mathbb{R} \mathbb{R}$. Ainsi $\prod_\mathbb{R}]0, 1[$ est un sous-espace non normal de l'espace $\prod_\mathbb{R} [0, 1]$.

(d) *NON.* Considérons les topologies $\mathcal{T}_{\text{st}} \subseteq \mathcal{T}_K$ sur $\mathbb{R}$. On sait que l'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est normal (donc régulier), or il n'est pas régulier (donc pas normal) lorsqu'il est muni de la topologie $\mathcal{T}_K$.

(e) *NON.* Considérons les topologies $\mathcal{T}_{\text{gr}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{st}}$ sur $\mathbb{R}$. On sait que l'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est normal (donc régulier), toutefois il n'est pas régulier (donc pas normal) lorsqu'il est muni de la topologie grossière.

(f) *OUI pour la régularité.* On a vu dans le cours qu'un produit d'espaces réguliers est toujours régulier.
NON pour la normalité. Le produit $\prod_J \mathbb{R}$ muni de la topologie produit $\star_J \mathcal{T}_{\text{st}}$ n'est pas normal lorsque J est indénombrable (Exercice 6). La normalité ne marche pas non plus avec les produits finis, car le produit $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup} \star \mathcal{T}_{\limsup})$ n'est pas normal, alors que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ l'est (Exercice 1 c).

(g) *NON.* Considérons l'espace $X = \{-1, 1\} \times [-1, 1]$ muni de la topologie standard et la relation d'équivalence $\sim$ introduite dans l'Exercice 2 (b) de la Série 8. Alors l'espace X est métrisable et donc normal (donc régulier), toutefois on a montré que le quotient n'est pas de Hausdorff, donc pas régulier (donc pas normal).

Exercice 8. Trouver un exemple d'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ tel que le singletons $\{x\}$ ne sont pas tous fermés mais $\forall x \in X$ et $\forall B \subseteq X \setminus \{x\}$ fermé, $\exists\, U, V$ ouverts t.q. $x \in U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Solution. Un exemple est $X := \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la topologie $\{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$. $\square$