TOPOLOGIE - SÉRIE 7

L'exercice 2 peut être rendu pour le 10 avril 2019.

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 1. ($\star$) En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i\in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i\in I}$ est non-vide (i.e. **l'axiome du choix**).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i\in I}$.

Preuve. On munit chaque Y_i de la topologie $\mathcal{T}_i := \{\varnothing, \{*\}, X_i, Y_i\}$ (facile de montrer que c'est bien une topologie). Comme cette topologie a seulement un nombre fini d'ouverts, l'espace $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ est compact et donc, par le théorème de Tychonoff, $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ muni de la topologie produit l'est aussi. De plus $X_i = Y_i \setminus \{*\}$ est fermé dans Y_i, ce qui implique que $A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$ est fermé car pr_i est continue par définition de la topologie produit. Montrons maintenant que $\{A_i\}_{i\in I}$ vérifie la PIF. Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini d'indices, on veut montrer que $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \varnothing$. Comme tous les X_j sont non vides par hypothèse, on peut choisir un élément $x_j \in X_j$ pour tout $j \in J$ (Attention: ici on n'utilise pas l'axiome du choix car J est fini!). Considérons alors $\underline{x} \in Y$ tel que

$$\underline{x}(i) = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ * & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors clairement $\underline{x} \in \bigcap_{j\in J} A_j$ ce qui montre que cette intersection est non vide. Donc la collection $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ est une collection de fermés qui vérifie la PIF. Comme Y est compact, par caractérisation de la compacité, on conclut que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Or $\prod_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. $\square$

Définition. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ **satisfait l'axiome** T_1 si, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est fermé dans X. Montrer que c'est équivalent à dire que, pour tout $x, y \in X$, il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ qui contient x, mais pas y. En particulier, si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, il satisfait l'axiome T_1.

Remarque. Voici une description très utile pour les ouverts de la topologie quotient. Si X est un espace topologique et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors pour U ouvert dans $X/_\sim$ il existe un ouvert V de X tel que $\pi(V) = U$ et

$$\text{si } y \in V \text{ et } y' \sim y \text{ alors } y' \in V.$$

Exercice 2. Montrer que

(a) l'espace $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ modulo la relation d'équivalence $\sim$, engendrée par

$$(a, x) \sim (b, y) \text{ si et seulement si } x = y \in [0, 1],$$

est homéomorphe à la lettre "Y" plongée dans $\mathbb{R}^2$, et il est donc métrisable.

(b) l'espace $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ modulo la relation d'équivalence $\sim$, engendrée par

$$(a, x) \sim (b, y) \text{ si et seulement si } x = y \in (0, 1],$$

est T_1 mais il n'est pas de Hausdorff.

Date: 2 avril 2019

Preuve. (a) Considère l'application $f : \{-1,1\} \times [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$(a,x) \mapsto \begin{cases} (0,x) & \text{si } x \in [0,1] \\ (ax,x) & \text{si } x \in [-1,0] \end{cases} .$$

On note que

(1) $f(x) = f(y)$ si $x \sim y$.

(2) f est continue par le lemme de recollement.

(3) $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.

(4) l'image de f est la *lettre "Y"* (à l'envers). On note $\operatorname{im} f =: Y$.

(5) $\{-1,1\} \times [-1,1]$ est compact, et Y est de Hausdorff.

Ces remarques impliquent respectivement que

(1) f induit $\overline{f} : [-1,1]/[0,1] \to [-1,0]$ telle que $f = \overline{f} \circ q$.

(2) $\overline{f}$ est continue.

(3) $\overline{f}$ est injective.

(4) l'image de $\overline{f}$ est $\operatorname{im}(\overline{f}) = \operatorname{im}(f) = Y$, la *lettre "Y"*.

(5) $[-1,1]/[0,1]$ est compact (car c'est l'image d'un compact par une application continue), et Y est de Hausdorff. □

Pour conclure, $\overline{f}$ est une application bijective et continue d'un compact vers un espace de Hausdorff, ce qui implique que $\overline{f}$ est un homéomorphisme.

(b) On utilise la remarque pour montrer que chaque voisinage de $[(-1,0)]$ intersecte chaque voisinage de $[(1,0)]$. Soit U^+ un ouvert dans le quotient qui contient $[(1,0)]$, et U^- un ouvert dans le quotient qui contient $[(-1,0)]$. Alors il existe V^+ et V^- tels que $\pi(V^+) = U^+$ et $\pi(V^-) = U^-$, et si $V^\pm$ contient un élément de X alors il contient toute la classe d'équivalence. En particulier $V^\pm$ est un ouvert de X qui contient $(\pm 1, 0)$, et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{\pm 1\} \times (\varepsilon, \varepsilon) \subseteq V^\pm$. Par la remarque et par comment $\sim$ est définie, on a aussi que $\{\mp 1\} \times (0,\varepsilon) \subseteq V^\pm$. En particulier, $\{1,-1\} \times (0,\varepsilon) \subseteq V^+ \cap V^- \neq \varnothing$ et ainsi

$$U^+ \cap U^- = \pi(V^+) \cap \pi(V^-) \supseteq \pi(V^+ \cap V^-) \supseteq \pi(\{1,-1\} \times (0,\varepsilon)) \neq \varnothing.$$

Exercice 3. Montrer ou réfuter que

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X, alors le sous-espace A est de Hausdorff aussi.

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T})$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, alors le produit $X \times X'$ est aussi de Hausdorff.

(c) Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, où I est un ensemble quelconque, alors le produit $\prod_{i \in I} X_i$ est aussi de Hausdorff.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, alors le quotient $X/_\sim$ est aussi de Hausdorff.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

Solution.

(a) On va montrer que si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $A \subseteq X$, alors $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi de Hausdorff. Soit $x_1 \neq x_2 \in A$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, il existe deux ouverts disjoints U_1, $U_2 \in \mathcal{T}$ de X tels que $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$. Finalement, $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$ sont deux ouverts disjoints de $(A, \mathcal{T}_A)$ tels que $x_1 \in U_1 \cap A$ et $x_2 \in U_2 \cap A$. Donc $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi de Hausdorff.

(b) On va montrer que si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, alors le produit $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff. Soit $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times X'$ et supposons sans perdre de généralités que $x_1 \neq x_2$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, il existe deux ouverts disjoints U_1, $U_2 \in \mathcal{T}$ de X tels que $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$. Les ouverts $U_1 \times X'$ et $U_2 \times X'$ par rapport à la topologie produit sont disjoints et $(x_1, y_1) \in U_1 \times X'$ et $(x_2, y_2) \in U_2 \times X'$. Donc $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

(c) On va a montrer que si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, alors le produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i))$ est aussi de Hausdorff. Comme décrit ci-dessus si $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I}$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Comme $(X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$ est de Hausdorff, il existe deux ouverts disjoints U_1, $U_2 \in \mathcal{T}_{i_0}$ tels que $x_{i_0} \in U_1$ et $y_{i_0} \in U_2$. Les ouverts $U := \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(U_1)$ et $V := \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(U_2)$ sont disjoints et $(x_i)_{i \in I} \in U$ et $(y_i)_{i \in I} \in V$. Donc le produit est bien de Hausdorff.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, alors le quotient $X/_\sim$ n'est pas nécéssairement de Hausdorff. Comme contre-exemple, on peut prendre l'espace de l'Exercice 2(b): $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ est de Hausdorff, alors que son quotient $\{-1, 1\} \times [-1, 1]/_\sim$ ne l'est pas.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine sur X, alors $(X, \mathcal{T}')$ n'est pas nécéssairement de Hausdorff. Comme contre-exemple, prendre $\mathbb{R}$ qui est de Hausdorff par rapport à la topologie standard, alors qu'il ne l'est pas par rapport à la topologie grossière. $\square$

Exercice 4. Pour les topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que

(a) $\mathbb{R}$ satisfait l'axiome T_1?

(b) $\mathbb{R}$ est un espace de Hausdorff?

(c) la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge? Vers quoi?

Solution.

On va dire, pour toutes les topologie, si elles satisfont l'axiome T_1 et/ou sont de Hausdorff.

(a) $\mathcal{T}_{\mathrm{st}}$ est de Hausdorff; en effet, la topologie est métrisable.

(b) $\mathcal{T}_K$ est de Hausdorff; en effet, la topologie est plus fine que $\mathcal{T}_{\mathrm{st}}$.

(c) $\mathcal{T}_{\mathrm{fin}}$ satisfait l'axiome T_1, mais elle n'est pas de Hausdorff; en effet, pour tous $x \neq y$, $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ est un voisinage de x qui ne contient pas y. Mais l'intersection de deux ouverts n'est jamais vide.

(d) $\mathcal{T}_{\mathrm{limsup}}$ est de Hausdorff; en effet, la topologie est plus fine que $\mathcal{T}_{\mathrm{st}}$.

(e) $\mathcal{T}_{\mathrm{sup}}$ ne satisfait pas l'axiome T_1; en effet, tous voisinage de 1 doit contenir 0.

(f) La topologie discrète $\mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$ est toujours de Hausdorff.

(g) Comme $\mathbb{R}$ a plus que deux éléments, la topologie grossière $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ ne satisfait pas l'axiome T_1.

On va dire, pour toutes les topologie, si la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, dans le cas où elle converge, vers quelle limite.

(a) La suite converge vers 0 par rapport à la topologie standard. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\frac{1}{n}$ est dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$ pour $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi on sait que cette topologie est de Hausdorff, donc il n'y a pas d'autres limites.

(b) Comme $\mathcal{T}_K$ contient la topologie standard, si la limite existait elle devrait être 0. Mais la suite ne converge pas vers 0 par rapport à la topologie $\mathcal{T}_K$. En effet, l'ouvert $\mathbb{R} \setminus K$ contient 0 et ne contient jamais $\frac{1}{n}$. Donc la suite ne converge vers aucun point.

(c) La suite converge vers n'importe quel $x \in \mathbb{R}$ dans la topologie du complément fini. En effet, si U est un ouvert qui contient x, alors $K \setminus U \subseteq \mathbb{R} \setminus U$ est fini. Cela veut dire qu'à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, la suite est dans U.

(d) Comme la topologie de la limite supérieure contient la topologie $\mathcal{T}_K$, la suite ne converge vers aucun point par rapport à $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$.

(e) La suite converge vers n'importe quel $x \geq 0$ par rapport à la topologie supérieure. En effet, pour tout $a > x \geq 0$, le nombre $\frac{1}{n}$ est dans $(-\infty, a)$ pour $n > \frac{1}{a}$. Ainsi la suite ne converge vers aucun $y < 0$. En effet, $(-\infty, \frac{y}{2})$ est un ouvert qui contient y et ne contient jamais $\frac{1}{n}$.

(f) Comme la topologie discrète contient la topologie $\mathcal{T}_K$, la suite ne converge vers aucun point par rapport à $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.

(g) La suite converge vers n'importe quel $x \in \mathbb{R}$ dans la topologie grossière. En effet, le seul ouvert qui contient x est $\mathbb{R}$ et vil contient également tous les éléments de la suite. □

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $D \subseteq X$ est **dense** par rapport à $\mathcal{T}$ si, pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$, il existe un élément $d \in D$ tel que $d \in U$.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y, \mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

(b) Pour $(Y, \mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D \subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Preuve.

(a) [$\Longrightarrow$] On va montrer que si Y est de Hausdorff, alors le complémentaire de la diagonale est ouvert. Soit $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors $x \neq y$ et, comme Y est de Haudorff, il existe deux ouverts disjoints U et V qui contiennent respectivement x et y. Alors $U \times V$ est ouvert dans $Y \times Y$, contient (x, y) et n'intersecte pas la diagonale.

[$\Longleftarrow$] Soit $x \neq y$ dans Y. Cela veut dire que $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors il existe un ouvert de base de $Y \times Y$ qui contient (x, y) et qui n'intersecte pas la diagonale. Cela signifie que $(x, y) \in U \times V \subseteq Y \times Y \setminus \Delta_Y$, pour des ouverts U et V dans Y. En particulier, on en déduit que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$.

(b) Remarquer d'abord que la définition de $D \subseteq X$ dense est équivalente à dire que $\overline{D} = X$. On va montrer que $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = X$. Si on définit $h\colon X \longrightarrow Y \times Y$ par $h(x) := (f(x), g(x))$, alors cette application est continue parce que ses projections f et g le sont. Ensuite, $E = h^{-1}(\Delta)$, qui est fermé comme h est continue et Y est de Hausdorff. Par ailleurs $E \supseteq D$. Donc on a $E = \overline{E} \supseteq \overline{D} = X$. □

Exercice 6. Soit R un anneau intègre. On considère la topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec}(R)$ définie à l'exercice 8 série 6.

(a) Soit P un idéal premier dans R. Calculer l'adhérence $\overline{\{P\}}$ dans $\operatorname{Spec}(R)$.

(b) Montrer que $\operatorname{Spec}(R)$ muni de la topologie de Zariski n'est pas de Hausdorff.

(c) On pose $R = \mathbb{Z}$. Décrire tous les points de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Donner explicitement l'adhérence des singletons $\{P\}$ pour chaque $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

(d) On pose $R = k[X]$, pour k un corps. Décrire tous les points de $\operatorname{Spec}(k[X])$. Donner explicitement l'adhérence des singletons $\{P\}$ pour chaque $P \in \operatorname{Spec}(k[X])$.

Solution.

(a) On montre que $\overline{\{P\}} = V_P$. Clairement, V_P est fermé dans $\operatorname{Spec}(R)$ et $P \in V_P$. Ainsi $\overline{\{P\}} \subseteq V_P$. Soit $Q \in V_P$ et soit I un idéal tel que $Q \in \operatorname{Spec}(R) \setminus V_I$. Alors $P \in \operatorname{Spec}(R) \setminus V_I$, puisque Q ne contient pas I et $P \subseteq Q$. Donc $Q \in \overline{\{P\}}$ et on a bien $\overline{\{P\}} = V_P$.

(b) On montre que $\operatorname{Spec}(R)$ ne satisfait pas l'axiome T_1. En effet, comme R est intègre, alors $(0) \in \operatorname{Spec}(R)$, mais $\overline{\{(0)\}} = V_{(0)} = \operatorname{Spec}(R)$ et donc $\{(0)\}$ n'est pas fermé dans $\operatorname{Spec}(R)$.

(c) Les points de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondent aux idéaux premiers de $\mathbb{Z}$, i.e. les idéaux de la forme (p) avec $p \in \mathbb{Z}$ premier et l'idéal (0). Comme les idéaux de la forme (p) sont aussi maximaux, alors $\overline{\{(p)\}} = V_{(p)} = \{(p)\}$. De plus, comme en (b), $\overline{\{(0)\}} = V_{(0)} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

(d) Les points de $\operatorname{Spec}(k[X])$ correspondent aux idéaux de la forme $(f(X))$ avec $f(X)$ un polynôme irréductible de $k[X]$ et l'idéal (0). Comme en (c), on a que

$$\overline{\{(f(X))\}} = V_{(f(X))} = \{(f(X))\} \quad \text{et} \quad \overline{\{(0)\}} = V_{(0)} = \operatorname{Spec}(k[X]).$$