TOPOLOGIE - SÉRIE 6

L'exercice 3 peut être rendu pour le 3 avril 2019.

Définition. Une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est dite **fermée** si, pour tout fermé $F \subseteq X$, $f(F) \subseteq Y$ est aussi fermé.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique compact. Montrer que le lemme du tube est équivalent à l'affirmation suivante:

$$\text{La projection } \pi_1\colon X \times X' \to X \text{ est une application fermée.}$$

Preuve. On commence par montrer que le lemme du tube implique l'affirmation ci-dessus. Soit $F \subseteq X \times X'$ un fermé. On veut montrer que $\pi_1(F) \subseteq X$ est fermé ou, de manière équivalente, que $X \setminus \pi_1(F) \subseteq X$ est ouvert. Soit $x_0 \in X \setminus \pi_1(F)$ et posons $N = (X \times X') \setminus F$. Alors $\{x_0\} \times X' \subseteq N$, car $(x_0, x') \notin F$ pour tout $x' \in X'$. Par le lemme du tube, il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x_0 \in U$ et $U \times X' \subseteq N$. En particulier, l'ouvert U est tel que $x_0 \in U \subseteq X \setminus \pi_1(F)$. Cela montre que $X \setminus \pi_1(F)$ est ouvert et donc que π_1 est une application fermée.

Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie et montrons que cela implique le lemme du tube. Soit $N \subseteq X \times X'$ un ouvert tel qu'il existe $x_0 \in X$ avec $\{x_0\} \times X' \subseteq N$. Posons $F = (X \times X') \setminus N$. Comme π_1 est une application fermée, on a que $\pi_1(F) \subseteq X$ est fermé ou, de manière équivalente, que $X \setminus \pi_1(F) \subseteq X$ est ouvert. De plus, $x_0 \in X \setminus \pi_1(F)$, car $(x_0, x') \in N = (X \times X') \setminus F$ pour tout $x' \in X'$. Ainsi il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x_0 \in U \subseteq X \setminus \pi_1(F)$ et cet ouvert U est tel que $U \times X' \subseteq N$, ce qui termine la preuve. $\square$

Exercice 2. Dans le lemme du tube, on pose $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $(X', \mathcal{T}') = ([-5, 5], \mathcal{T}_{\text{st}}|_{[-5,5]})$, $N = \{(x, y)\colon xy < 1\} \subseteq X \times X'$ et $x_0 = 0$. Trouver un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \times X' \subseteq N$. Que se passe-t-il lorsque l'on prend $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$?

Solution. On peut prendre $U = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| < \frac{1}{5}\} =]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$. En effet, on a bien que

$$]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[\times[-5, 5] \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [-5, 5]\colon xy < 1\} = N.$$

Lorsque $X' = \mathbb{R}$, un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in N$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ est tel que $x < \frac{1}{y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $x = 0$. Comme $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas ouvert, il n'existe aucun U pour le lemme du tube, ce qui n'est pas une contradiction car $\mathbb{R}$ n'est pas complet. $\square$

Exercice 3. ($\star$) Soit V un espace vectoriel sur un corps k. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$ on note $\operatorname{span}(A) = \sum_{a \in A} ka$ le sous-espace vectoriel engendré par A. Montrer les points suivants en utilisant le lemme de Zorn où c'est nécessaire.

(a) Si $A \subseteq V$ est linéairement indépendant et $v \in V$ est tel que $v \notin \operatorname{span}(A)$, démontrer que $A \cup \{v\}$ est linéairement indépendant.

(b) Démontrer que la collection de tous les ensembles linéairement indépendants dans V possède un élément maximal.

(c) Démontrer que l'espace vectoriel V admet une base.

Preuve.

Date: 2 avril 2019

(a) Soient $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in k$ tels que

$$\lambda_0 v + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \lambda_0 v = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) a_i \in \operatorname{span}(A),$$

Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v \in \operatorname{span}(A)$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $\lambda_0 = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. Comme les a_i sont contenus dans A qui est une partie linéairement indépendante, il s'en suit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On conclut que $A \cup \{v\}$ est une partie linéairement indépendante.

(b) Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties linéairement indépendantes de V. Pour une chaîne $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$, on montre que $B := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{L}$, autrement dit on montre que B est linéairement indépendant. Soient $a_1, \dots, a_n \in B$. Alors, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $A_i \in \mathcal{A}$ tel que $a_i \in A_i$. Comme $\mathcal{A}$ est une chaîne, un des A_i, que l'on dénote par A, contient tous les autres (i.e. $A_i \subseteq A$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$). En particulier, $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et les a_i sont donc linéairement indépendants, puisque A est une partie linéairement indépendante. En appliquant le lemme de Zorn, on trouve un élément maximal $L \in \mathcal{L}$.

(c) On montre que l'élément maximal $L \in \mathcal{L}$ forme une base de V. Par définition de $\mathcal{L}$, la partie L est linéairement indépendante. Supposons par l'absurde qu'elle n'engendre pas V. S'il existe un $v \in V \setminus \operatorname{span}(L)$, alors $L \cup \{v\}$ est linéairement indépendant par (a), mais $L \subsetneq L \cup \{v\}$, ce qui contredit la maximalité de L. Donc $\operatorname{span}(L) = V$. □

Définition. Soit X un ensemble, et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X$, $X/_\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $\pi : X \to X/_\sim$ la projection $x \mapsto [x]$. On définit la **topologie quotient** sur $X/_\sim$ par

$$U \subseteq X/_\sim \text{ est ouvert dans } X/_\sim \text{ si et seulement si } \pi^{-1}(U) \subseteq X \text{ est ouvert dans } X.$$

Vérifier que cela donne bien une topologie!

Exercice 4. Soient l'espace $\mathbb{R}$ muni de sa topologie standard, et $\sim$ la relation d'équivalence suivante:

$$x \sim y \iff x = y = 0 \text{ ou } xy > 0.$$

Expliciter la topologie quotient.

Solution. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/_\sim$ n'a que trois éléments:

$$\mathbb{R}/_\sim = \{[-1], [0], [1]\}.$$

La topologie quotient est donnée par

$$\{\varnothing, \{[-1], [0], [1]\}, \{[-1]\}, \{[1]\}, \{[-1], [1]\}\}.$$

Exercice 5. On considère l'ensemble $[0, 1]$ muni de la topologie standard. *Même sans le montrer et d'une façon informelle*, peut-on deviner l'espace topologique quotient $[0, 1]/_\sim$ dans les cas suivants? Faire un dessin.

(a) $x \sim y \iff \{x, y\} \subseteq \{0, 1\}$ ou $x = y$.

(b) $x \sim y \iff \{x, y\} \subseteq \{0, \frac{1}{2}\}$ ou $x = y$.

(c) $x \sim y \iff \{x,y\} \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ou $x = y$.

Solution.

(a) Lorsque l'on idéntifie 0 et 1, on obtient un cercle avec la topologie standard.

(b) Lorsque l'on idéntifie 0 et $\frac{1}{2}$, on obtient un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de la forme de la lettre σ.

(c) Lorsque l'on idéntifie 0, $\frac{1}{2}$ et 1, on obtient un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de la forme du nombre 8.

$\square$

Définition. Une application surjective $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est une **application quotient** si, pour tout $U \subseteq Y$, on a que

$$U \text{ est un ouvert de } Y \text{ si et seulement si } f^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } X.$$

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\sim$ une relation d'équivalence sur X.
Montrer que

(a) la projection $\pi : X \to X/_\sim$ est continue.

(b) pour toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) = f(y)$ lorsque $x \sim y$, il existe une unique application continue $\hat{f} : X/_\sim \to Y$ telle que $\hat{f} \circ \pi = f$.

(c) pour toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) = f(x')$ si et seulement $x \sim x'$, l'application $\hat{f}$ est un homéomorphisme si et seulement si f est une *application quotient.*

Preuve.

(a) Par définition de la topologie quotient, la préimage par π d'un ouvert de $X/_\sim$ est un ouvert de X, ce qui montre que π est continue.

(b) Soit $f : X \to Y$ une application continue telle que $f(x) = f(y)$ lorsque $x \sim y$. S'il existe une application continue $\hat{f}$ telle que $\hat{f} \circ \pi = f$, alors elle est nécéssairement donnée par

$$\hat{f}([x]) = \hat{f}(\pi(x)) = f(x),$$

d'où l'unicité de $\hat{f}$. Pour l'existence, il suffit de remarquer qu'en posant

$$\hat{f}([x]) := f(x)$$

, on obtient une application

- *bien définie*: en effet, si $[x] = [y]$, alors $x \sim y$ et $f(x) = f(y)$.
- *telle que* $\hat{f} \circ \pi = f$: par définition de $\hat{f}$.
- *continue*: en effet, si U est un ouvert de Y, alors

$$\pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(U)) = (\hat{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U),$$

qui est un ouvert de X, car f est continue. Par définition de la topologie quotient, on conclut que $\hat{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de $X/_\sim$ et ainsi $\hat{f}$ est continue.

(c) Si $\hat{f}$ est un homéomorphisme, alors $f = \hat{f} \circ \pi$ est surjective comme composition d'applications surjectives. Soit U un ouvert de Y. Alors $f^{-1}(U) = \pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(U))$ est ouvert si et seulement si $\hat{f}^{-1}(U)$ est ouvert (par définition de la topologie quotient) si et seulement si U est ouvert, car $\hat{f}$ est un homéomorphisme. Donc f est une application quotient.

Pour l'autre implication, supposons que f soit une application quotient. Alors $\hat{f}$ est bien un homéomorphisme car elle est

- *surjective*: en effet, on sait que $\hat{f} \circ \pi = f$ est surjective, et donc $\hat{f}$ l'est aussi.
- *injective*: en effet, si $\hat{f}([x]) = \hat{f}([y])$, alors $f(x) = f(y)$ et $x \sim y$, d'où $[x] = [y]$.
- *avec inverse continue*: en effet, si U un ouvert de $X/_\sim$, alors $\hat{f}(U)$ est ouvert dans Y si et seulement si $f^{-1}(\hat{f}(U))$ est ouvert dans X, car f est une application quotient, mais

  $$f^{-1}(\hat{f}(U)) = (\hat{f} \circ \pi)^{-1}(\hat{f}(U)) = (\hat{f}^{-1} \circ \hat{f} \circ \pi)^{-1}(U) = (\mathrm{id}_{X/_\sim} \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(U),$$

  qui est ouvert, par définition de la topologie quotient sur $X/_\sim$. Donc $\hat{f}^{-1}$ est bien continue. □

Exercice 7. Est-ce que la topologie quotient d'un espace muni de la topologie

(a) discrète est la topologie discrète?

(b) grossière est la topologie grossière?

(c) du complément fini est la topologie du complément fini?

(d) du complément dénombrable est la topologie du complément dénombrable?

Solution. (a) *OUI.* Soit $q : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (X', \mathcal{T}')$ une application quotient. Soit $U' \subseteq \mathcal{P}(X')$. On sait que $q^{-1}(U') \in \mathcal{T}_{\text{disc}}$ (car toutes partie de X est un ouvert) et donc comme q est une application quotient, $U' \in \mathcal{T}'$. Donc, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_{\text{disc}}$.

(b) *OUI.* Soit $q : (X, \mathcal{T}_{gr}) \to (X', \mathcal{T}')$ une application quotient. Soit $U' \subseteq \mathcal{P}(X')$ qui vérifie $q^{-1}(U') \in \mathcal{T}_{\text{gr}}$. Alors, $q^{-1}(U') = \varnothing$ ou $q^{-1}(U') = X$. Mais alors $U' = \varnothing$ ou $U' = X'$ car q est une surjection. Ainsi, les seuls ouverts sont X' et $\varnothing$. D'où, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_{\text{gr}}$.

(c) *NON.* Soit

$$q : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{fin}}) \to (\mathbb{R}/\sim, \mathcal{T}_q)$$

une application quotient, où

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \cdot y > 0 \text{ ou } x = y.$$

On obtient donc trois classes : $[0], [1]$ et $[-1]$, qui est fini. Si, par l'absurde,

$$(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{T}_q) = (\mathbb{R}/\sim, \mathcal{T}_{\text{fin}}),$$

alors $[1]$ est un ouvert (le complément contient seulement $[0]$ et $[-1]$, et il est donc fini!). Comme q est une application quotient, $q^{-1}([1])$ est un ouvert de la topologie cofinie. Mais

$$\mathbb{R} \setminus q^{-1}([1]) = \mathbb{R} \setminus (0, \infty) = (-\infty, 0],$$

qui n'est pas fini.

(d) *NON.* En remplaçant fini dans le point précédent par dénombrable, nous avons deux contre-exemples pour la topologie co-dénombrable. □

Exercice 8. Write $\mathrm{Spec}(R)$ for the set of all prime ideals of a commutative ring R. For an ideal I of R, let $V_I = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$.

(a) Show that $\mathcal{Z} = \{\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I \mid I \text{ an ideal of } R\}$ is a topology on $\mathrm{Spec}(R)$. It is called the *Zariski topology.*

(b) Write $D_r \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ for the set of all prime ideals not containing $r \in R$. Show that $\{D_r \mid r \in R\}$ is a basis for $\mathcal{Z}$.

Solution.

(a) Clearly $V_{(0)} = \mathrm{Spec}(R)$, since every ideal contains 0, so $\varnothing = \mathrm{Spec}(R) \setminus V_{(0)} \in \mathcal{Z}$. And $V_R = \varnothing$ since a prime ideal of R cannot be all of R, and therefore $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(R) \setminus \varnothing \in \mathcal{Z}$.

For ideals I, J we have $(\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I) \cap (\mathrm{Spec}(R) \setminus V_J) = \mathrm{Spec}(R) \setminus (V_I \cup V_J)$. Consider the ideal IJ. Since $IJ \subseteq I$ and $IJ \subseteq J$, $V_I \cup V_J \subseteq V_{IJ}$. Suppose P is a prime ideal with $IJ \subseteq P$. Because P is prime, P has to contain either I or J (otherwise there would be an $rs \in IJ \subseteq P$ with $r, s \notin P$). Therefore $V_{IJ} \subseteq V_I \cup V_J$, and we have $\mathrm{Spec}(R) \setminus (V_I \cup V_J) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V_{IJ}$, so $(\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I) \cap (\mathrm{Spec}(R) \setminus V_J)$ is open.

For an arbitrary set of ideals A, consider $\bigcup_{I \in A} (\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I) = \mathrm{Spec}(R) \setminus \bigcap_{I \in A} V_I$. Let J be the smallest ideal containing $\bigcup_{I \in A} I$. Then $V_J \subseteq \bigcap_{I \in A} V_I$. Suppose P is a prime ideal containing $\bigcup_{I \in A} I$; then $J \subseteq P$, so $V_J \supseteq \bigcap_{I \in A} V_I$. Thus $\bigcup_{I \in A} (\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I) = \mathrm{Spec} R \setminus V_J$ is open.

(b) Pour $r \in R$, l'ensemble D_r est ouvert dans $\mathcal{Z}$, car $D_r = \mathrm{Spec}(R) \setminus V_{(r)}$. Montrons que $\{Dr \mid r \in R\}$ engendre la topologie $\mathcal{Z}$. Soit $I \subset R$ un idéal. Soit $P \in \mathrm{Spec} \setminus V_I$. On pose $r \in (R \setminus P) \cap I$. On montre que $P \in D_r \subseteq \mathrm{Spec} \setminus V_I$. Comme on a choisi $r \notin P$, alors $P \in D_r$. De plus, si $Q \in D_r$, alors $r \notin Q$. Donc Q ne peut pas contenir I, puisque $r \in I$ et $Q \in \mathrm{Spec} \setminus V_I$. Donc $\{Dr \mid r \in R\}$ est bien une base pour $\mathcal{Z}$. $\square$