TOPOLOGIE - SÉRIE 5

L'exercice 6 peut être rendu pour le 27 mars 2019.

Exercice 1. Soit X un espace topologique et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés emboîtés non vides de X telle que F_0 est compact. Montrer que

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$;

(b) si U est un ouvert de X qui contient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors U contient l'un des fermés de la suite.

Preuve. (a) On sait que F_0 est compact, et que $\{F_n\}_n$ est une famille de fermés de F_0. On remarque que toute intersection finie $\bigcap_{n=0}^N F_n$ n'est pas vide:

$$\bigcap_{n=0}^{N} F_n = F_N \neq \varnothing,$$

et alors par la PIF on sait que l'intersection infinie n'est pas vide:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

(b) On sait que $F_0 \setminus U = F_0 \cap (X \setminus U)$ est compact, car fermé dans le compact F_0, et que $\{F_n \setminus U\}_n$ est une famille de fermés de F_0. On remarque que l'intersection infinie $\bigcap_{n\in N}(F_n \setminus U)$ est vide car $U \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F_n \setminus U) = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) \setminus U = \varnothing,$$

et alors par la PIF on sait qu'il existe une intersection finie $\bigcap_{n=0}^N (F_n \setminus U)$ qui est vide:

$$\varnothing = \bigcap_{n=0}^{N} (F_n \setminus U) = (\bigcap_{n=0}^{N} F_n) \setminus U = F_N \setminus U.$$

De manière équivalente, on a que $U \supseteq F_N$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est **ouverte** si, pour tout $U \subseteq X$ ouvert, $f(U) \subseteq Y$ est aussi ouvert. Montrer que les projections $\pi_1\colon X \times Y \to X$ et $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ sont des applications ouvertes par rapport à la topologie produit et les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement.

Preuve. Soit $A \subseteq X \times Y$ un ouvert. Comme $\{U \times V : U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$ est une base de la topologie produit sur $X \times Y$, alors

$$A = \bigcup_{i\in I} (U_i \times V_i)$$

où I est un ensemble, $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ et $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}'$. On a que

$$\pi_1(A) = \pi_1\left(\bigcup_{i\in I} (U_i \times V_i)\right) = \bigcup_{i\in I} \pi_1(U_i \times V_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$$

est ouvert dans $(X, \mathcal{T})$. Idem pour $\pi_2(A)$. Donc π_1 et π_2 sont des applications ouvertes. □

Date: 19 mars 2019

Exercice 3. Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.

(a) Montrer que, pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$, on a que

$$\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$$

par rapport à la topologie produit.

(b) Montrer que, pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $Y_i \subseteq X_i$, on a que

$$*_{i\in I}\mathcal{T}_i|_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)\,|_{\prod_{i\in I} Y_i}$$

par rapport à la topologie produit.

(c) Soit I un ensemble et $\{\varphi_i \colon (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X_i', \mathcal{T}_i')\}_{i\in I}$ une famille d'homéomorphismes. Montrer que

$$(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i) \cong (\prod_{i\in I} X_i', *_{i\in I}\mathcal{T}_i')$$

sont homéomorphes.

(d) Trouver un exemple d'un produit non dénombrable d'espaces métrisables qui n'est pas métrisable. Est-ce qu'un produit non dénombrable d'espaces métrisables peut être métrisable?

Preuve.

(a) Nous allons commencer par montrer que $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé dans $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$. Soit $x \notin \prod_{i\in I} \overline{M_i}$. Alors il existe $j \in I$ tel que $x(j) \notin \overline{M_j}$, c'est à dire il existe un ouvert U de X_j avec $x(j) \in U$ et $U \subseteq X_j \setminus M_j$. On remarque que l'ouvert de sous-base $\{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in U\}$ contient x et est inclus dans le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$.
Par conséquent, le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est ouvert et donc $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé. Or $\overline{\prod_{i\in I} M_i}$ est le plus petit fermé contenant $\prod_{i\in I} M_i$, et donc $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.
Pour l'inclusion inverse, nous allons utiliser la caractérisation de l'adhérence par les bases. Soit $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ et un ouvert de base W de la topologie produit qui contient x. Par définition, W est de la forme

$$W = \left\{ z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1, \ldots n \right\},$$

□

où $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_n \in I$ et $z(j_k) \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$ pour $k = 1, \ldots n$.
Puisque $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$, alors pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in V_i \cap M_i$, où $V_i = X_i$ si $i \neq j_k$ et $V_{j_k} = U_{j_k}$ sinon. On définit y par $y(j) = y_j$ et on remarque que $y \in W \cap \prod_{i\in I} M_i$.
Ceci montre que $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \supseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.

(b) Nous allons démontrer que si $(X, \mathcal{T})$ admet une base $\mathcal{B}$ et $Y \subseteq X$ alors $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ est une base pour la topologie sur Y. Il est clair que tous les éléments de $\mathcal{B}_Y$ sont des ouverts de $(Y, \mathcal{T}_Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \subseteq \mathcal{T}_Y$. Par ailleurs, si $W \in \mathcal{T}_Y$, alors il existe un ouvert U de X tel que $W = U \cap Y$.
Alors, puisque $\mathcal{B}$ est une base, il existe des $B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ avec $U = \bigcup_{i\in I} B_i$.
On a que $W = (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \supseteq \mathcal{T}_Y$.

En appliquant le résultat à $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $Y = \prod_{i\in I} Y_i$, on obtient que la topologie $(*_{i\in I}\mathcal{T}_i)\,|_{\prod_{i\in I} Y_i}$ a pour base

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i : x(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1,\dots n \right\} \cap \prod_{i\in I} Y_i : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\} \\ &= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} Y_i : x(j_k) \in U_{j_k} \cap Y_{j_k} \text{ pour } k = 1,\dots n \right\} : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\}\end{aligned}$$

et on remarque que cette base est exactement celle du produit $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i|_{Y_i})$

(c) L'application $\prod_{i\in I}\varphi_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ est bijective avec inverse $\prod_{i\in I}\varphi_i^{-1}$. De plus, $\prod_{i\in I}\varphi_i$ et $\prod_{i\in I}\varphi_i^{-1}$ sont continues. En effet, si $\prod_{i\in I} U_i$ est un ouvert de base de $\prod_{i\in I} Y_i$, i.e. $U_i \subseteq Y_i$ est ouvert et $U_i \neq Y_i$ seulement pour un nombre fini de $i \in I$, alors

$$(\prod_{i\in I}\varphi_i)^{-1}\left(\prod_{i\in I} U_i\right) = \prod_{i\in I}\varphi_i^{-1}(U_i)$$

est ouvert (de base) dans $\prod_{i\in I} X_i$. En effet, $\varphi_i^{-1}(U_i) \subseteq X_i$ est ouvert, par continuité de φ_i, et $\varphi_i^{-1}(Y_i) = X_i$, pour tout $i \in I$. De même, on peut montrer la continuité de $\prod_{i\in I}\varphi_i^{-1}$. Ainsi $*_{i\in I}\mathcal{T}_i|_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)\,|_{\prod_{i\in I} Y_i}$.

(d) On va montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un exemple.

Un espace topologique X est à **bases dénombrables de voisinages** si, pour tout $x \in X$, il existe une suite $V_0, V_1, V_2, \dots$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contienne l'un des V_n. Tout espace métrisable est à bases dénombrables de voisinages. En effet, pour $x \in X$, prendre par exemple V_n une boule de centre x et de rayon 2^{-n}.

Montrons que $X = \prod_{i\in\mathbb{R}}\mathbb{R}$ n'est pas à bases dénombrables de voisinages. Supposons par l'absurde que, pour $x \in X$, il existe une base dénombrable de voisinages $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $V_i = \prod_{j\in\mathbb{R}} V_{i,j}$, l'ouvert $V_{i,j}$ est égal à $\mathbb{R}$ sauf pour un nombre fini de j (c'est-à-dire l'ensemble $k_i := \{j \in \mathbb{R} \mid V_{i,j} \neq \mathbb{R}\}$ est fini). Alors $K := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} k_i$ est dénombrable et l'inclusion $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $\iota^{-1}(l)$ est vide. Si $V = \prod_{j\in\mathbb{R}} V_j$ avec $V_l \neq \mathbb{R}$, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $V_i \subsetneq V$, ce qui contredit l'hypothèse.

Par contre, le produit $\prod_{\alpha\in J}\{*\}$ est métrisable, pour tout ensemble J (même indénombrable).

Définition. On définit sur $\prod_{i\in I} X_i$ deux nouvelles topologies:

- la **topologie boîte**, qui est engendrée par $\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$.
- lorsque tout $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est métrisé par d_i, la **topologie uniforme**, qui est induite par la métrique $\overline{\rho} : \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}$, où

$$\overline{\rho}((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) := \min\{1, \sup\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in I\}\}.$$

Exercice 4.

(a) Montrer que sur $\prod_{i\in I} X_i$ la topologie boîte est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(b) Montrer que, si tout X_i est un espace métrique, alors la topologie boîte sur $\prod_{i\in I} X_i$ est plus fine que la topologie uniforme, qui est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où les inclusions sont strictes.

Preuve. (a) Par définition, la topologie produit est contenue dans la topologie boite.

(b) La topologie produit est contenue dans la topologie uniforme. En effet, pour tout ouvert de base de la topologie produit $U = \prod_{i\in I} B_{d_i}(x_i, \varepsilon_i)$, avec $\varepsilon_i > 0$ et égal à 2 sauf pour un nombre fini de i (c'est-à-dire l'ensemble $J := \{i \in I \mid \varepsilon_i \neq 2\}$ est fini), et pour tout $x \in U$, en posant $\varepsilon := \min_{j\in J} \varepsilon_j$, on a que

$$x \in B_{\overline{\rho}}(x, \varepsilon) = \prod_{i\in I} B_{d_i}(x_i, \varepsilon) \subseteq \prod_{i\in I} B_{d_i}(x_i, \varepsilon_i) =: U.$$

La topologie uniforme est contenue dans la topologie boite car, par comparaison des bases, on a

$$\prod_{i\in I} B_{d_i}(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B_{\overline{\rho}}(x, \varepsilon).$$

Soient maintenant $I := \mathbb{N}$ et $X_i := \mathbb{R}$ avec la topologie standard pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors

- $U := \prod_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ est un ouvert de la topologie boîte qui n'est pas dans la topologie uniforme. En fait, U contient $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, pourtant il ne contient aucune boule $B_{\overline{\rho}}((0)_{n\in\mathbb{N}}, \varepsilon)$.
- $B_{\overline{\rho}}((0)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$ est un ouvert de la topologie uniforme qui n'est pas ouvert dans la topologie produit.

Exercice 5. Soit $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans le produit $\prod_{i\in I} X_i$.

(a) Montrer que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $\mathbf{x}$ par rapport à la topologie produit si et seulement si la suite $(\mathrm{pr}_i(\mathbf{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{pr}_i(\mathbf{x})$ pour tout $i \in I$. (Une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(X, \mathcal{T})$ converge vers un point $\mathbf{x}$ par rapport à $\mathcal{T}$ si pour tout $U \in \mathcal{T}$ qui contient $\mathbf{x}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, l'on a que $x_n \in U$.)

(b) Est-ce que c'est aussi vrai si on munit $\prod_{i\in I} X_i$ de la topologie boîte?

(c) Si, pour tout $i \in I$, on pose $X_i = X$, où X est un espace métrique, alors $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\prod_{i\in I} X$ par rapport à la métrique uniforme si et seulement si la suite de fonctions $(\mathbf{x}_n : I \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement au sens de l'analyse. Ensuite, si I est muni d'une topologie et toute $\mathbf{x}_n : I \to X$ est continue, alors la limite l'est aussi.

Preuve. (a) [$\Longrightarrow$]; Supposons que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$ par rapport à la topologie produit, et on montre que pour tout $i \in I$ la suite $(\mathbf{x}_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}(i)$ dans X_i. Soit U un ouvert de X_i qui contient $\mathbf{x}(i)$. Comme les projections sont continues par rapport à la topologie produit, on a que $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ est un ouvert dans le produit qui contient $\mathbf{x}$, qui est la limite de la suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{x}_n \in \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ pour tout $n > N$. En particulier, pour tout $n > N$, on a que $\mathbf{x}_n(i) \in \mathrm{pr}_i(\mathrm{pr}_i^{-1}(U)) \subseteq U$, ce qui montre que la suite $(\mathbf{x}_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}(i)$.
[$\Longleftarrow$]; Supposons que pour tout $i \in I$ la suite $(\mathbf{x}_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}(i)$ dans X_i, et on montre que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$ par rapport à la topologie produit. Soit U un ouvert de base dans la topologie produit qui contient $\mathbf{x}$. Alors U est de la forme $U = \prod_{i\in I} U_i$ avec U_i ouvert de X_i et égal à X_i sauf pour un nombre fini de i, c'est-à-dire l'ensemble $J := \{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ est fini. Pour tout $j \in J$, la suite $\mathbf{x}_n(j)$ converge vers $\mathbf{x}(j)$, et donc il existe $n_j \in N$ tel que $\mathbf{x}_n(j)$ est dans U_j pour tout $n > n_j$. Alors, pour tout $n > \max_{j\in J} n_j$, on a que $\mathbf{x}_n$ est dans U, ce qui montre que la suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$.

(b) La propriété (a) n'est pas vraie pour la topologie boîte. En effet, si on pose $I := \mathbb{N}$, $X_i := \mathbb{R}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{x}_n(i) := \frac{i}{n+1}$, alors chaque $(\mathbf{x}_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans X_i mais $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. En fait, si la suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, la limite devrait être donnée par $(0)_{i\in\mathbb{N}}$. Pourtant, si on pose $U := \prod_{i\in\mathbb{N}}(-1,1)$, on a un ouvert de la topologie boîte qui contient $(0)_{i\in\mathbb{N}}$, mais $\mathbf{x}_n$ n'est pas dans U pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) $[\Longrightarrow]$; Supposons qu'on a une famille d'applications $(\mathbf{x}_n : I \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une application $\mathbf{x} : I \to X$. Soit $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ une boule dans $\left(\prod_{i\in I} X, \mathcal{T}_{\bar\rho}\right)$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_X(\mathbf{x}_n(i), \mathbf{x}(i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $i \in I$ lorsque $n > N$. Alors, pour tout $n > N$, on a que

$$\bar\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \sup_{i\in I} d_X(\mathbf{x}_n(i), \mathbf{x}(i)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

ce qui veut dire que la suite est dans la boule à partir d'un certain indice, et donc elle converge vers $\mathbf{x}$ dans la topologie induite par la métrique.

$[\Longleftarrow]$; Supposons qu'on ait une famille d'applications $(\mathbf{x}_n : I \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathbf{x}$ dans $\left(\prod_{i\in I} X, \mathcal{T}_{\bar\rho}\right)$. Soit $\varepsilon > 0$; comme la suite converge vers $\mathbf{x}$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ lorsque $n > N$. En particulier, pour $n > N$ et $i \in I$, on a

$$d_X(\mathbf{x}_n(i), \mathbf{x}(i)) \leq \sup_{i\in I} d_X(\mathbf{x}_n(i), \mathbf{x}(i)) = \bar\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon.$$

Donc la suite converge uniformément vers $\mathbf{x}$.

Ensuite, on montre que si I est muni d'une topologie et toute $\mathbf{x}_n$ est continue, alors la limite $\mathbf{x} : I \to X$ l'est aussi. Soit i_0 dans I, et $\varepsilon > 0$. Comme la suite de fonctions converge uniformément, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_X(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}_N(i)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } i \in I.$$

De plus, comme $\mathbf{x}_N$ est continue, il existe un ouvert U de I qui contient i_0 tel que

$$d_X(\mathbf{x}_N(i), \mathbf{x}_N(i_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ alors que } i \in U.$$

Finalement, pour tout $i \in U$ l'on a que

$$\begin{aligned} d_X(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(i_0)) &\leq d_X(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}_N(i)) + d_X(\mathbf{x}_N(i), \mathbf{x}_N(i_0)) + d_X(\mathbf{x}_N(i_0), \mathbf{x}(i_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de $\mathbf{x}$.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}^\omega$ le produit infini dénombrable de $\mathbb{R}$ avec lui-même, i.e. $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}$, et soit $\mathbb{R}^\infty$ le sous ensemble de $\mathbb{R}^\omega$ qui consiste en des suites $(x_1, x_2, \dots)$ telles que $x_i \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valeurs de i.

(a) Démontrer que $\mathbb{R}^\infty$ est dense dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie produit, i.e. l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie produit est $\mathbb{R}^\omega$.

(b) Démontrer que $\mathbb{R}^\infty$ est fermé par rapport à la topologie boîte, i.e. l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie boîte est $\mathbb{R}^\infty$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ l'application telle que $f(t) = (t, t, t, \dots)$. Montrer que f est continue par rapport à la topologie produit sur $\mathbb{R}^\omega$, mais pas par rapport à la topologie boîte sur $\mathbb{R}^\omega$.

(d) Par un théorème du cours, $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie produit est métrisable. Est-ce que c'est aussi le cas lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie boîte?

Preuve.

(a) On va montrer que tout ouvert de base $U := \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ de la topologie produit intersecte $\mathbb{R}^\infty$, et donc $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$.

Soit $j := \max\{n \in \mathbb{N} : U_n \neq \mathbb{R}\}$. Alors, si on définit $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$y_n = \begin{cases} x_n & n \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a que

$$y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap \mathbb{R}^{j+1} \subseteq \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap \mathbb{R}^\infty = U \cap \mathbb{R}^\infty.$$

(b) On va montrer que le complémentaire de $\mathbb{R}^\infty$ est ouvert par rapport à la topologie boîte, et donc $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\infty$.

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega \setminus \mathbb{R}^\infty$, alors $I := \{i \in \mathbb{N} \mid \ | x_i \neq 0\}$ est infini. Soit

$$U_n := (x_n - |x_n/2|, x_n + |x_n/2|),$$

quand $n \in I$, et $U_i := \mathbb{R}$ sinon. Ainsi, $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est bien un ouvert de la topologie boîte et, comme $x_n \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $x \in U$. On vérifie facilement que $U \cap \mathbb{R}^\infty = \varnothing$. En effet, pour tout $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$, on a que $\{n \in \mathbb{N} \mid y_n \neq 0\} \supseteq I$, qui est infini, et donc y n'appartient pas à $\mathbb{R}^\infty$.

(c) La fonction f est continue par rapport à la topologie produit sur $\mathbb{R}^\omega$, car chacune de ses composantes $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t$ est continue.

On montre que f n'est pas continue par rapport à la topologie boîte sur $\mathbb{R}^\omega$. On considère l'ouvert de base

$$B = (-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \dots$$

dans la topologie boîte. Supposons par l'absurde que $f^{-1}(B)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Si c'est le cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(B)$. Autrement dit, $f((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq B$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. On applique la projection $\pi_n \colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ à l'équation ci-dessus et on obtient

$$\pi_n\left(f((-\varepsilon,\varepsilon))\right) = (-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \pi_n(B).$$

Contradiction! Donc $f^{-1}(B)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ et ainsi f n'est pas continue.

(d) On montre que $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie boîte n'est pas métrisable. On utilise le résultat suivant:

($\star$) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable et $A \subseteq X$ un sous-ensemble. Alors il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers $x \in X$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

On considère $A = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i > 0 \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$. Soit $\mathbf{0} = (0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$. Alors $\mathbf{0} \in \overline{A}$ par rapport à la topologie boîte. En effet, si $B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots$ est un ouvert de base qui contient $\mathbf{0}$, alors $B \cap A \neq \varnothing$, puisqu'il contient le point $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots)$.

On montre qu'aucune suite de points de A ne converge vers $\mathbf{0}$. Soit $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans A telle que $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \dots)$, où $a_{in} > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'ouvert de base

$$B = (-a_{11}, a_{11}) \times (-a_{22}, a_{22}) \times (-a_{33}, a_{33}) \times \dots$$

Alors B contient $\mathbf{0}$, mais aucun élément de la suite $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Donc cette suite ne converge pas vers $\mathbf{0}$. Par ($\star$), $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie boîte n'est pas métrisable.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la métrique d peut être remplacée par une métrique bornée d' telle que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Preuve. On pose $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$. On considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow [0, 1[, \quad x \mapsto \tfrac{x}{1+x} = 1 - \tfrac{1}{1+x}.$$

Alors $d' = f \circ d\colon X \times X \to [0, 1[$ est bien définie. Il est clair que d' est bornée. On montre que c'est une métrique. Comme $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et d est une métrique, alors $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$. De plus, d' est symétrique puisque d l'est. Il reste à montrer l'inégalité du triangle. Pour $a, b \geqslant 0$, on a

$$f(a + b) - f(b) = \frac{a}{(1 + b)(1 + a + b)} \leqslant \frac{a}{1 + a} = f(a).$$

Ainsi, en utilisant le fait que f est croissante et que d satisfait l'inégalité triangulaire, on obtient

$$d'(x, y) + d'(y, z) = f(d(x, y)) + f(d(y, z)) \geqslant f(d(x, y) + d(y, z)) \geqslant f(d(x, z)) = d'(x, z)$$

pour tout $x, y, z \in X$. Ainsi d' est bien une métrique.

Comme $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to [0, 1[, x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et son inverse $f^{-1}\colon [0, 1[\to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, y \mapsto \frac{y}{1-y}$ sont continues, alors $d' = f \circ d$ est continue par rapport à $\mathcal{T}_d$, i.e. $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$, et $d = f^{-1} \circ d'$ est continue par rapport à $\mathcal{T}_{d'}$, i.e. $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$. Ainsi $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. □