Topologie algébrique
Série 6

25.03.2019

L'exercice 2 est à rendre le 01.04.2019.

1. Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$. Si

$$v = (0, ..., 0, 1), w = (0, ..., 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

alors la *suspension simpliciale* de $\mathcal{K}$ est $\Sigma\mathcal{K} = (v * \mathcal{K}) \cup (w * \mathcal{K})$. Montrer que $\Sigma\mathcal{K}$ est un complexe simplicial et calculer son homologie simpliciale en fonction de l'homologie simpliciale de $\mathcal{K}$. A quel espace bien connu est-ce que le polytope $|\Sigma^n \partial\mathcal{K}(\Delta^m)|$ (où $n, m \geq 1$) est homéomorphe ?

2. Le *plan projectif réel* $\mathbb{R}P^2$ est l'espace quotient $D^2/\sim$, où D^2 est le disque de rayon 1 dans le plan $\mathbb{R}^2$, et $(x, y) \sim (-x, -y)$ pour tout $(x, y) \in S^1$. Trouver une description de $\mathbb{R}P^2$ comme espace obtenu par recollement d'un étiquettage ρ et ensuite calculer l'homologie simpliciale du complexe simplicial $\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}$, en utilisant le Théorème de Mayer-Vietoris simplicial. (On verra plus tard que le résultat obtenu est indépendant de l'étiquettage choisi.)

3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fini, et soit $\varepsilon \geq 0$. Le *complexe de Vietoris-Rips* associé au couple (A, ε), noté $VR(A, \varepsilon)$, est le complexe simplicial abstrait défini par

$$VR(A, \varepsilon)_n = \big\{\{a_0, ..., a_n\} \subset A \mid d(a_i, a_j) \leq \varepsilon \; \forall i, j\big\},$$

où d est la distance euclidienne.

   (a) Montrer que $VR(A, \varepsilon)$ est bien un complexe simplicial abstrait.

   (b) Montrer que si $\varepsilon < \varepsilon'$, il exist un morphisme simplicial

$$\iota_{\varepsilon,\varepsilon'} : \mathcal{K}_{VR(A,\varepsilon)} \to \mathcal{K}_{VR(A,\varepsilon')}$$

   tel que $\iota_{\varepsilon,\varepsilon''} = \iota_{\varepsilon',\varepsilon''} \circ \iota_{\varepsilon,\varepsilon'}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon''$.

(c) Trouver un sous-ensemble fini A de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$H_0VR(A,0)=\mathbb{Z}^{\oplus 5}, H_0VR(A,\frac{1}{2})=\mathbb{Z}^{\oplus 3}, H_0VR(A,\frac{\sqrt{2}}{2})=\mathbb{Z}^{\oplus 2}, H_0VR(A,\varepsilon)=\mathbb{Z}\ \forall\varepsilon>1,$$

$$H_1VR(A,0)=H_1VR(A,\frac{1}{2})=H_1VR(A,\frac{\sqrt{2}}{2})=0, H_1VR(A,1)=\mathbb{Z}, H_1VR(A,\varepsilon)=0\ \forall\varepsilon>\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(d) Expliciter les homomorphismes $H_0(\iota_{0,\frac{1}{2}})$, $H_0(\iota_{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}})$, et $H_0(\iota_{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2}})$.