# Topologie algébrique
# Série 5

18.03.2019

**L'exercice 3 est à rendre le 25.03.2019.**

1. (Construction de complexes simpliciaux par recollement) Soient $\mathcal{K}$ un complexe simplicial and $W$ un ensemble, et soit $\rho : \mathcal{K}_0 \to W$ une application surjective, appelé un *étiquettage* des sommets de $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{S}(\rho)$ le complexe simplicial abstrait

$$\mathcal{S}(\rho) = \big\{\{\rho(v_0), ..., \rho(v_n)\} \mid [v_0, ..., v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0\big\}.$$

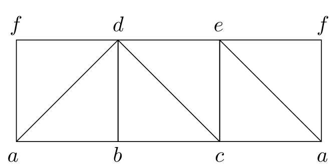
   (a) Montrer que l'application $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{S}(\rho)_0$ induite par $\rho$ s'étend en une application continue et surjective

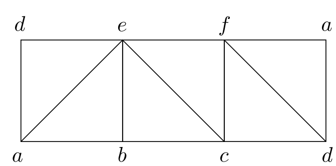
$$\widehat{\rho} : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}|.$$

   On appelle le complexe simplicial $\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}$ le *recollement de $\mathcal{K}$ selon $\rho$.*

   (b) Montrer que $\widehat{\rho}$ est une application quotient et que l'on peut donc voir $|\mathcal{K}_{\mathcal{S}(\rho)}|$ comme un espace quotient de $|\mathcal{K}|$. Quelle est la relation d'équivalence associée sur $|\mathcal{K}|$?

   (c) Pour les étiquettages suivants, dire quels sont les espaces obtenus par recollement.




   (d) Trouver un étiquettage dont l'espace obtenu par recollement est homéomorphe au tore.

   (e) Utiliser cette description du tore pour calculer son homologie simpliciale.

2. Calculer tous les groupes d'homologie simpliciale de $\mathcal{K}(\Delta^n)$ et de $\partial\mathcal{K}(\Delta^n)$ pour $n = 2, 3$.

3. Construire (et justifier)
   (a) une famille $\{\mathcal{K}(n) \mid n \geq 1\}$ de complexes simpliciaux finis non-isomorphes telle que $H_0\mathcal{K}(n) = \mathbb{Z} = H_1\mathcal{K}(n)$ et $H_k\mathcal{K}(n) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et pour tout $n \geq 1$;
   (b) pour tout $n \geq 1$, un complexe simplicial $\mathcal{L}(n)$ tel que $H_0\mathcal{L}(n) = \mathbb{Z}$, $H_1\mathcal{L}(n) = \mathbb{Z}^n$, et $H_k\mathcal{L}(n) = 0$ pour tout $k \geq 2$;
   (c) un complexe simplicial $\mathcal{K}$ ayant six sommets et tel que $H_0\mathcal{K} = \mathbb{Z}$, $H_1\mathcal{K} = 0$, $H_2\mathcal{K} = \mathbb{Z}$, et $H_k\mathcal{K} = 0$ pour tout $k \geq 3$.