

# Topologie algébrique

## Série 4

11.03.2019

**L'exercice 3 est à rendre le 18.03.2019.**

1. Soit  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$  une courte suite exacte de complexes de chaînes. Montrer que

$$\ker(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \rightarrow H_nC') = \text{Im}(H_{n+1}g : H_{n+1}C \rightarrow H_{n+1}C'')$$

et

$$\text{Im}(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \rightarrow H_nC') = \ker(H_nf : H_nC' \rightarrow H_nC)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

2. (Topologie de polytopes) Soit  $\mathcal{K}$  un complexe simplicial.

- (a) Montrer que  $|\mathcal{K}|$  est de Hausdorff.
- (b) Montrer que si  $\mathcal{K}$  est fini, alors  $|\mathcal{K}|$  est compact.
- (c) Montrer que si  $A$  un sous-espace compact de  $|\mathcal{K}|$ , alors il existe un sous-complexe fini  $\mathcal{K}'$  de  $\mathcal{K}$  tel que  $A \subseteq |\mathcal{K}'|$ .

3. (Complexes simpliciaux abstraits)

**Definition 1.** Un *complexe simplicial abstrait* consiste en une collection  $\mathcal{S}$  d'ensembles nonvides telle que si  $\sigma \in \mathcal{S}$ , alors  $\tau \in \mathcal{S}$  pour tout  $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ . Un élément  $\sigma \in \mathcal{S}$  est un *simplexe* de  $\mathcal{S}$ . Un simplexe  $\sigma$  de cardinalité  $n+1$  est un *n-simplexe* de  $\mathcal{S}$ ; l'ensemble des *n*-simplexes de  $\mathcal{S}$  est noté  $\mathcal{S}_n$ . Si  $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ , alors  $\tau$  est une *face* de  $\sigma$ . Deux complexes simpliciaux abstraits  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont *isomorphes* s'il y a une bijection  $\alpha : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}'_0$  induisant des bijections  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}'_n$  pour tout  $n$ .

- (a) Soit  $\mathcal{K}$  un complexe simplicial géométrique. Soit  $\mathcal{S}(\mathcal{K})$  la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \left\{ \{v_0, \dots, v_n\} \mid \{\{v_0\}, \dots, \{v_n\}\} \subset \mathcal{K}_0 \text{ et } [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \right\}.$$

Montrer que  $\mathcal{S}(\mathcal{K})$  est un complexe simplicial abstrait.

- (b) Soit  $\mathcal{S}$  un complexe simplicial abstrait. Montrer que si  $\mathcal{S}$  est fini, il existe un complexe simplicial géométrique  $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$  tel que  $\mathcal{S}$  soit isomorphe à  $\mathcal{S}(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$ .
- (c) Soient  $\mathcal{K}$  un complexe simplicial et  $W$  un ensemble. Soit  $\rho : \mathcal{K}_0 \rightarrow W$  une application surjective, appelé un *étiquetage* des sommets de  $\mathcal{K}$ . Soit  $\mathcal{S}(\rho)$  la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\rho) = \{ \{\rho(v_0), \dots, \rho(v_n)\} \mid [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \}.$$

(Observer que la cardinalité de  $\{\rho(v_0), \dots, \rho(v_n)\}$  peut être inférieur à  $n + 1$ , car  $\rho$  n'est pas forcément injective.) Montrer que  $\mathcal{S}(\rho)$  est un complexe simplicial abstrait.