

Topologie algébrique

Série 3

04.03.2019

L'exercice 2 est à rendre le 11.03.2019.

1. Soient C et C' des complexes de chaînes. Montrer que la relation “il existe une homotopie de chaînes” est une relation d’équivalence sur $\text{Ch}(C, C')$.
2. Deux complexes de chaînes C et C' ont le même type d’homotopie s’il existe des morphismes de complexes de chaînes $f : C \rightarrow C'$ et $g : C' \rightarrow C$ tels que $gf \simeq \text{Id}_C$ et $fg \simeq \text{Id}_{C'}$.
 - (a) Montrer que si deux complexes de chaînes ont le même type d’homotopie, alors leurs groupes d’homologie sont isomorphes.
 - (b) Montrer que si C et C' ont le même type d’homotopie, et \tilde{C} et \tilde{C}' ont le même type d’homotopie, alors $C \oplus \tilde{C}$ et $C' \oplus \tilde{C}'$ ont le même type d’homotopie.
 - (c) Donner deux exemples de couples de complexes de chaînes qui ont le même type d’homotopie, mais qui ne sont pas isomorphes.
 - (d) Donner un exemple d’un couple de complexes de chaînes qui ont les mêmes groupes d’homologie, mais pas le même type d’homotopie.
3. (Suite exacte de Mayer-Vietoris) Soit C un complexe de chaînes, et soient C', C'' des sous-complexes de C tel que $C_n = C'_n + C''_n$ (somme non forcément directe!) pour tout n . Montrer que $C' \cap C''$ est aussi un sous-complexe de C . Trouver une longue suite exacte qui met en relation les groupes d’homologie de C , de $C' \oplus C''$, et de $C' \cap C''$.