Topologie algébrique
Série 2

25.02.2019

L'exercice 2 est à rendre le 04.03.2019.

1. Si $C = (C_*, d_*)$ et $C' = (C'_*, d'_*)$ sont des complexes de chaînes, leur *somme directe* $C \oplus C'$ est le complexe de chaînes défini par $(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ pour tout n, avec différentielle

$$d''_n : C_n \oplus C'_n \to C_{n-1} \oplus C'_{n-1} : c + c' \mapsto d_n c + d'_n c'.$$

Montrer que $H_n(C \oplus C') \cong H_n(C) \oplus H_n(C')$ (en tant que groupes abéliens) pour tout $n \geq 0$.

2. (Le lemme du serpent) Soit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes dans Ab, où chaque ligne est exacte. Montrer qu'il y a une suite exacte induite

$$0 \to \ker f' \to \ker f \to \ker f'' \to \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'' \to 0.$$