TOPOLOGIE - QUIZ 5

Question 1. Vrai ou faux?

(a) Soient $f : A \to B$ et $g : C \to D$ deux fonctions continues entre espaces topologiques. Alors leur produit

$$f \times g : A \times C \to B \times D, \quad (a, c) \mapsto (f(a), g(c))$$

est continue par rapport aux topologies produits.

(b) Soit X et Y deux espaces topologiques tels que $X \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in X$. Alors

$$\iota_{x_0} : Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x_0, y)$$

est continue par rapport à la topologie sur Y et la topologie produit sur $X \times Y$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 6

L'exercice 3 peut être rendu pour le 3 avril 2019.

Définition. Une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est dite **fermée** si, pour tout fermé $F \subseteq X$, $f(F) \subseteq Y$ est aussi fermé.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique compact. Montrer que le lemme du tube est équivalent à l'affirmation suivante:

La projection $\pi_1\colon X \times X' \to X$ est une application fermée.

Exercice 2. Dans le lemme du tube, on pose $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $(X', \mathcal{T}') = ([-5, 5], \mathcal{T}_{\text{st}}|_{[-5,5]})$, $N = \{(x, y)\colon xy < 1\} \subseteq X \times X'$ et $x_0 = 0$. Trouver un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \times X' \subseteq N$.
Que se passe-t-il lorsque l'on prend $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$?

Exercice 3. $(\star)$ Soit V un espace vectoriel sur un corps k. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$ on note $\text{span}(A) = \sum_{a \in A} ka$ le sous-espace vectoriel engendré par A. Montrer les points suivants en utilisant le lemme de Zorn où c'est nécessaire.

(a) Si $A \subseteq V$ est linéairement indépendant et $v \in V$ est tel que $v \notin \text{span}(A)$, démontrer que $A \cup \{v\}$ est linéairement indépendant.

(b) Démontrer que la collection de tous les ensembles linéairement indépendants dans V possède un élément maximal.

(c) Démontrer que l'espace vectoriel V admet une base.

Définition. Soit X un ensemble, et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X$, $X/_\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $\pi : X \to X/_\sim$ la projection $x \mapsto [x]$. On définit la **topologie quotient** sur $X/_\sim$ par

$U \subseteq X/_\sim$ est ouvert dans $X/_\sim$ si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ est ouvert dans X.

Vérifier que cela donne bien une topologie!

Exercice 4. Soient l'espace $\mathbb{R}$ muni de sa topologie standard, et $\sim$ la relation d'équivalence suivante:

$$x \sim y \iff x = y = 0 \text{ ou } xy > 0.$$

Expliciter la topologie quotient.

Exercice 5. On considère l'ensemble $[0, 1]$ muni de la topologie standard. *Même sans le montrer et d'une façon informelle*, peut-on deviner l'espace topologique quotient $[0, 1]/_\sim$ dans les cas suivants? Faire un dessin.

(a) $x \sim y \iff \{x, y\} \subseteq \{0, 1\}$ ou $x = y$.

(b) $x \sim y \iff \{x, y\} \subseteq \{0, \frac{1}{2}\}$ ou $x = y$.

(c) $x \sim y \iff \{x, y\} \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ou $x = y$.

Définition. Une application surjective $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est une **application quotient** si, pour tout $U \subseteq Y$, on a que

U est un ouvert de Y si et seulement si $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Date: 26 mars 2019

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Montrer que

(a) la projection $\pi : X \to X/_\sim$ est continue.

(b) pour toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) = f(y)$ lorsque $x \sim y$, il existe une unique application continue $\hat{f} : X/_\sim \to Y$ telle que $\hat{f} \circ \pi = f$.

(c) pour toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) = f(x')$ si et seulement $x \sim x'$, l'application $\hat{f}$ est un homéomorphisme si et seulement si f est une *application quotient.*

Exercice 7. Est-ce que la topologie quotient d'un espace muni de la topologie

(a) discrète est la topologie discrète?

(b) grossière est la topologie grossière?

(c) du complément fini est la topologie du complément fini?

(d) du complément dénombrable est la topologie du complément dénombrable?

Exercice 8. Write $\mathrm{Spec}(R)$ for the set of all prime ideals of a commutative ring R. For an ideal I of R, let $V_I = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$.

(a) Show that $\mathcal{Z} = \{\mathrm{Spec}(R) \setminus V_I \mid I \text{ an ideal of } R\}$ is a topology on $\mathrm{Spec}(R)$. It is called the *Zariski topology.*

(b) Write $D_r \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ for the set of all prime ideals not containing $r \in R$. Show that $\{D_r \mid r \in R\}$ is a basis for $\mathcal{Z}$.