TOPOLOGIE - QUIZ 4

Question 1. Est-ce que $[0,1]$ muni de la topologie de sous-espace de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est compact?

Question 2. *Même sans le montrer et d'une façon informelle*, peut-on deviner le compactifié de Alexandroff

- de $\{\star\}$?
- de $\mathbb{R}$?
- de $\mathbb{R}^2$?
- de $[0,1]$?
- de $[0,1)$?
- de $(0,1)$?
- de $[0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$?
- de $(0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1)$?
- de K?

TOPOLOGIE - SÉRIE 5

L'exercice 6 peut être rendu pour le 27 mars 2019.

Exercice 1. Soit X un espace topologique et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés emboîtés non vides de X telle que F_0 est compact. Montrer que

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$;

(b) si U est un ouvert de X qui contient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors U contient l'un des fermés de la suite.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est **ouverte** si, pour tout $U \subseteq X$ ouvert, $f(U) \subseteq Y$ est aussi ouvert. Montrer que les projections $\pi_1\colon X \times Y \to X$ et $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ sont des applications ouvertes par rapport à la topologie produit et les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement.

Exercice 3. Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.

(a) Montrer que, pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$, on a que

$$\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$$

par rapport à la topologie produit.

(b) Montrer que, pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $Y_i \subseteq X_i$, on a que

$$*_{i\in I}\mathcal{T}_i|_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)\,|_{\prod_{i\in I} Y_i}$$

par rapport à la topologie produit.

(c) Soit I un ensemble et $\{\varphi_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X_i', \mathcal{T}_i')\}_{i\in I}$ une famille d'homéomorphismes. Montrer que

$$(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i) \cong (\prod_{i\in I} X_i', *_{i\in I}\mathcal{T}_i')$$

sont homéomorphes.

(d) Trouver un exemple d'un produit non dénombrable d'espaces métrisables qui n'est pas métrisable. Est-ce qu'un produit non dénombrable d'espaces métrisables peut être métrisable?

Définition. On définit sur $\prod_{i\in I} X_i$ deux nouvelles topologies:

- la **topologie boîte**, qui est engendrée par $\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$.
- lorsque tout $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est métrisé par d_i, la **topologie uniforme**, qui est induite par la métrique $\overline{\rho} : \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}$, où

$$\overline{\rho}((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) := \min\{1, \sup\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in I\}\}.$$

Exercice 4.

(a) Montrer que sur $\prod_{i\in I} X_i$ la topologie boîte est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(b) Montrer que, si tout X_i est un espace métrique, alors la topologie boîte sur $\prod_{i\in I} X_i$ est plus fine que la topologie uniforme, qui est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où les inclusions sont strictes.

Date: 18 mars 2019

Exercice 5. Soit $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans le produit $\prod_{i\in I} X_i$.

(a) Montrer que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $\mathbf{x}$ par rapport à la topologie produit si et seulement si la suite $(\mathrm{pr}_i(\mathbf{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{pr}_i(\mathbf{x})$ pour tout $i \in I$. (Une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(X, \mathcal{T})$ converge vers un point $\mathbf{x}$ par rapport à $\mathcal{T}$ si pour tout $U \in \mathcal{T}$ qui contient $\mathbf{x}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, l'on a que $x_n \in U$.)

(b) Est-ce que c'est aussi vrai si on munit $\prod_{i\in I} X_i$ de la topologie boîte?

(c) Si, pour tout $i \in I$, on pose $X_i = X$, où X est un espace métrique, alors $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\prod_{i\in I} X$ par rapport à la métrique uniforme si et seulement si la suite de fonctions $(\mathbf{x}_n : I \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement au sens de l'analyse. Ensuite, si I est muni d'une topologie et toute $\mathbf{x}_n : I \to X$ est continue, alors la limite l'est aussi.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}^\omega$ le produit infini dénombrable de $\mathbb{R}$ avec lui-même, i.e. $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}$, et soit $\mathbb{R}^\infty$ le sous ensemble de $\mathbb{R}^\omega$ qui consiste en des suites $(x_1, x_2, \dots)$ telles que $x_i \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valeurs de i.

(a) Démontrer que $\mathbb{R}^\infty$ est dense dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie produit, i.e. l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie produit est $\mathbb{R}^\omega$.

(b) Démontrer que $\mathbb{R}^\infty$ est fermé par rapport à la topologie boîte, i.e. l'adhérence de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à la topologie boîte est $\mathbb{R}^\infty$.

(c) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ l'application telle que $f(t) = (t, t, t, \ldots)$. Montrer que f est continue par rapport à la topologie produit sur $\mathbb{R}^\omega$, mais pas par rapport à la topologie boîte sur $\mathbb{R}^\omega$.

(d) Par un théorème du cours, $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie produit est métrisable. Est-ce que c'est aussi le cas lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie boîte?

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la métrique d peut être remplacée par une métrique bornée d' telle que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.