TOPOLOGIE - QUIZ 3

Question 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $A \subseteq Y \subseteq X$ des sous-espaces. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse et, dans le cas où l'affirmation est fausse, donner une condition sur A, Y ou X qui la rende vraie.

(a) Tout ouvert U de A est un ouvert de X.

(b) Tout fermé F de A est un fermé de X.

(c) La topologie de sous-espace $\mathcal{T}_A$ induite sur A comme sous-espace de X et la topologie de sous-espace $(\mathcal{T}_Y)_A$ induite sur A comme sous-espace de Y, où Y est muni de la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_Y$, sont égales.

TOPOLOGIE - SÉRIE 4

L'exercice 8 peut être rendu pour le 20 mars 2019.

Exercice 1. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et les $f|_{X_n}\colon (X_n,\mathcal{T}_{X_n}) \to (Y,\mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

Exercice 2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 5 & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4\cos(\pi x) & \text{if } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Dire si f est continue par rapport à $(\mathcal{T}_{st})_{[0,2]}$ et $\mathcal{T}_{st}$.

Exercice 3. Soit $(Y,\leqslant)$ un ensemble ordonné. Une base pour la topologie d'ordre $\mathcal{T}_{\leqslant}$ sur Y est donnée par les ouverts $]x,y[= \{z \in Y \mid x < z < y\}$, $]-\infty,x[= \{z \in Y \mid z < x\}$ et $]x,+\infty[= \{z \in Y \mid z > x\}$ pour tous $x,y \in Y$. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $f,g\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_{\leqslant})$ deux applications continues.

(a) Montrer que $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ est un fermé de X par rapport à $\mathcal{T}$.

(b) Soit $h\colon X \to Y$ la fonction définie par

$$h(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Montrer que h est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\leqslant}$.
Hint: utiliser le lemme de recollement.

Exercice 4. Est-ce que $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est compact? Et $\mathbb{Q}$? Et $\mathbb{N}$? Et K? Et $K \cup \{0\}$?

Exercice 5. Par rapport aux topologies de la Série 1 Exercice 5 sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que $\mathbb{R}$ est compact?

Exercice 6.

(a) Montrer que tous les sous-espaces de $\mathbb{R}$ sont compacts par rapport à la topologie du complément fini $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Est-ce que l'intervalle $[0,1]$ est compact par rapport à la topologie du complément dénombrable $\mathcal{T}_{\text{dén}}$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. Quelle doit être la cardinalité d'un ensemble pour qu'il soit compact lorsqu'on le munit de la topologie

(a) discrète?

(b) grossière?

(c) du complément fini?

(d) du complément dénombrable?

Date: 13 mars 2019

Exercice 8. (Compactifié d'Alexandrov)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X \cup \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ **ouvert** si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert, soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;

(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie standard, et on considère le sous-espace

$$S := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}.$$

(a) Est-ce que S est fermé?

(b) Est-ce que S est compact?

Exercice 10. Vrai ou Faux?

(a) La topologie produit de deux copies de la topologie standard sur $\mathbb{R}$ est la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$.

(b) La topologie produit de deux copies de la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ est la topologie cofinie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $Y \subseteq X$, $Y' \subseteq X'$ deux sous-ensembles. Montrer que la topologie produit $\mathcal{T}|_Y \star \mathcal{T}'|_{Y'}$ et la topologie de sous-espace $(\mathcal{T} \star \mathcal{T}')|_{Y \times Y'}$ sur $Y \times Y'$ sont égales.

Exercice 12. Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Montrer que

(a) si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont fermés, alors $A \times B \subseteq X \times Y$ est aussi fermé.

(b) si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont deux sous-ensembles, alors $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dans $X \times Y$.