TOPOLOGIE - QUIZ 2

Question 1. Vrai ou faux?
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subseteq B \subseteq X$.

$$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}.$$

Question 2. Par rapport aux sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, quelle est l'adhérence de $\mathbb{N}$?

TOPOLOGIE - SÉRIE 3

L'exercice 6 peut être rendu pour le 13 mars 2019.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$.

(a) Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, alors $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une base de $\mathcal{T}_Y$.

(b) Soit $A \subseteq Y$. Montrer que l'adhérence de A par rapport à $\mathcal{T}_Y$ est égale à $\bar{A} \cap Y$, où $\bar{A}$ est son adhérence par rapport à $\mathcal{T}$.

Exercice 2. Par rapport aux sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, dire quand la topologie de sous-espace induite sur $\mathbb{N}$ est discrète. Et sur K? Et sur $K \cup \{0\}$?

Exercice 3. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. Prouver que f est continue par rapport à $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$ si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall x' \in X : d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := |x| \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

est continue seulement en 0, par rapport à la topologie standard sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) := 2x \text{ et } g(x) := -x.$$

Par rapport aux sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, dire quand f et g sont des homéomorphismes.

Exercice 6. Montrer que, par rapport à la topologie standard, tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas vides sont homéomorphes. Et les intervalles fermés?

Exercice 7. Montrer qu'un espace topologique homéomorphe à un espace muni de la topologie discrète (resp. grossière) est aussi muni de la topologie discrète (resp. grossière). Montrer aussi que (X, T) est muni de la topologie discrète (resp. grossière) si et seulement si T_Y est la topologie discrète (resp. grossière) pour chaque sous-ensemble $Y \subseteq X$.

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ des espaces topologiques homéomorphes. Montrer que si $(X, \mathcal{T})$ est métrisable, alors $(Y, \mathcal{T}')$ est aussi métrisable.

Exercice 9. Montrer que $S^1 \setminus \{(0,1)\}$, muni de la topologie de sous-espace de la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$, est homéomorphe à $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard.

Exercice 10. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est **ouverte** si, pour tout $U \subseteq X$ ouvert, $f(U) \subseteq Y$ est aussi ouvert. Montrer qu'une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est bijective, continue et ouverte.

Date: 5 mars 2019