TOPOLOGIE - QUIZ 1

Soient

$$\mathcal{A}_1 := \{(a,b)\}_{a,b\in\mathbb{Q}}, \quad \mathcal{A}_2 := \{(a,b)\}_{a,b\in\mathbb{Z}}, \text{ et } \mathcal{A}_3 := \{(a,a+1)\}_{a\in\mathbb{Z}}.$$

Question 1. Est-ce que $\mathcal{A}_1$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, la topologie que $\mathcal{A}_1$ engendre est-elle la topologie standard?

Question 2. Est-ce que $\mathcal{A}_2$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, la topologie que $\mathcal{A}_2$ engendre est-elle la topologie standard?

Question 3. Est-ce que $\mathcal{A}_3$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, la topologie que $\mathcal{A}_3$ engendre est-elle la topologie standard?

TOPOLOGIE - SÉRIE 2

L'exercice 7 peut être rendu pour le 7 mars 2018.

Exercice 1 (Sous-bases).

(a) Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ et soit $\mathcal{S} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Trouver la topologie engendrée par $\mathcal{S}$ sur X.

(b) Décrire la topologie $\mathcal{T}$ sur la droite réelle $\mathbb{R}$ qui est engendrée par la famille

$$\mathcal{S} = \big\{[a, a+1]\big\}_{a\in\mathbb{R}}.$$

(c) Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie discrète $\mathcal{T}_{\text{disc}}$. Trouver une sous-base $\mathcal{S}$ pour $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ telle que $\mathcal{S}$ ne contient aucun singleton.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subseteq$" ou "$\supseteq$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

(a) si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \overline{N}$;

(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;

(c) $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$;

(d) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$;

(e) $\bigcap_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} M_i}$;

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que

(a) pour tout $A \subseteq X$, l'adhérence de A est donnée par

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

(b) pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, la boule fermée $\bar{B}(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ est vraiment fermée dans X.

(c) pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ est incluse dans la boule fermée $\bar{B}(x, \varepsilon)$, c'est-à-dire

$$\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon).$$

Exercice 4. Soit X un ensemble.

(a) Montrer qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$ on a que $\{x\} \in \mathcal{T}$.

(b) Si X est fini, montrer qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$ on a que $\{x\}$ est fermé.

(c) Et pour X dénombrable?

(d) Montrer que la métrique

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases},$$

induit la topologie discrète sur X. Utiliser cet exemple pour montrer que l'inclusion $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon)$ de l'Exercice 3(c) peut être stricte.

Date: 20 février 2019

(e) Si $|X| > 1$, montrer qu'il n'existe aucune métrique qui induit la topologie grossière sur X. *Indication: utiliser l'Exercice 3(b)*

Exercice 5. Considérer les sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, Exercice 5. Pour chacune, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Exercice 6 ($\star$). Considérons $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Indication: $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, *i.e.*, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subseteq X$ un sous-espace. L'**intérieur** de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A:

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \subseteq A \colon U \in \mathcal{T}} U.$$

C'est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier, $\mathring{A} \subseteq A$, et A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Exercice 7. Soit $f \colon X \to Y$ une application entre espaces topologiques. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue.

(ii) $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ pour tout $A \subseteq Y$.

(iii) $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A)}}$ pour tout $A \subseteq Y$.

Montrer par des exemples que les inclusions ci-dessus peuvent être strictes.

Exercice 8. Considérons l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\},$$

et l'application $f : X \to X$ définie par

$$a \mapsto b,\ b \mapsto d,\ c \mapsto b,\ d \mapsto c.$$

Déterminer en chaque point de X si f est continue en ce point.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si les ensembles $\{x \colon f(x) < \lambda\}$ et $\{x \colon f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X. On considère la fonction indicatrice de A: $\chi_A \colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que χ_A soit continue.