TOPOLOGIE - SÉRIE 4

L'exercice 8 peut être rendu pour le 20 mars 2019.

Exercice 1. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et les $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{T}_{X_n}) \to (Y,\mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

Preuve. On considère $X = \mathbb{N}$ avec la topologie de complément fini et $Y = \mathbb{N}$ avec la topologie discrète, et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application identité. Il est clair que f n'est pas continue, car la topologie discrète est strictement plus fine que la topologie de complément fini.

On pose $X_n = \{n\}$, il est clair que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Par ailleurs, toute application constante est continue, et donc $f|_{X_n}$ est toujours continue. Ceci fournit le contre-exemple demandé. $\square$

Exercice 2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 5 & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4\cos(\pi x) & \text{if } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Dire si f est continue par rapport à $(\mathcal{T}_{st})_{[0,2]}$ et $\mathcal{T}_{st}$.

Preuve. On applique le lemme de recollement à $[0,2] = [0,1] \cup [1,2]$. Clairement,

$$f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 5 \quad \text{et} \quad f_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto 4\cos(\pi x)$$

sont continues. De plus, $[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$ et $f_1(1) = -4 = f_2(1)$. Par le lemme de recollement, f est continue. $\square$

Exercice 3. Soit $(Y, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Une base pour la topologie d'ordre $\mathcal{T}_{\leqslant}$ sur Y est donnée par les ouverts $]x,y[= \{z \in Y \mid x < z < y\}$, $]-\infty, x[= \{z \in Y \mid z < x\}$ et $]x,+\infty[= \{z \in Y \mid z > x\}$ pour tous $x, y \in Y$. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $f, g\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{\leqslant})$ deux applications continues.

(a) Montrer que $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ est un fermé de X par rapport à $\mathcal{T}$.

(b) Soit $h\colon X \to Y$ la fonction définie par

$$h(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Montrer que h est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\leqslant}$.
Hint: utiliser le lemme de recollement.

Solution.

(a) On montre que $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ est fermé dans X. Considérons l'application

$$\varphi\colon X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y, \quad x \mapsto (x,x) \mapsto (f(x), g(x)).$$

Alors φ est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et la topologie produit $\mathcal{T}_{\leqslant} * \mathcal{T}_{\leqslant}$ sur $Y \times Y$. Considérons le sous-ensemble $U = \{(y,z) \mid z < y\} \subseteq Y \times Y$. Alors U est ouvert dans $Y \times Y$. En effet, soit $(y,z) \in U$. On distingue différent cas:

Date: 19 mars 2019

- Supposons qu'il existe des éléments y_0, y_1, z_0 tels que $z_0 < z < y_0 < y < y_1$. Alors $]y_0, y_1[\times]z_0, y_0[$ est un ouvert de $Y \times Y$ contenant (y, z) et contenu dans U.
- Si z est minimal dans Y, alors $]y_0, y_1[\times[z, y_0[$ est un ouvert de $Y \times Y$ contenant (y, z) et contenu dans U.
- Si y est maximal dans Y, alors $]y_0, y]\times]z_0, y_0[$ est un ouvert de $Y \times Y$ contenant (y, z) et contenu dans U.
- S'il n'existe aucun élément y_0 tel que $y < y_0 < z$, alors $]z, y_1[\times]z_0, y[$ est un ouvert de $Y \times Y$ contenant (y, z) et contenu dans U.
- Les autres cas découlent de ceux-ci et sont laissés en exercice.

Cela montre que U est ouvert. Ainsi $\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid g(x) < f(x)\}$ est ouvert dans X par continuité de φ. Ainsi $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert.

(b) Sur $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$, $h(x) = f(x)$ et, sur $\{x \in X \mid g(x) \leqslant f(x)\}$, $h(x) = g(x)$. Par (a), ces deux sous-espaces sont fermés et leur intersection est $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Par le lemme de recollement, h est continue. □

Exercice 4. Est-ce que $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard est compact? Et $\mathbb{Q}$? Et $\mathbb{N}$? Et K? Et $K \cup \{0\}$?

Solution.

- $\mathbb{R}$ n'est pas compact, car le recouvrement $\{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'admet aucun sous-recouvrement fini.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas compact, car le recouvrement $\{\mathbb{Q} \cap (n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'admet aucun sous-recouvrement fini.
- $\mathbb{N}$ n'est pas compact, car le recouvrement $\{\{n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun sous-recouvrement fini.
- K n'est pas compact, car le recouvrement $\{\{\frac{1}{n}\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun sous-recouvrement fini.
- $K \cup \{0\}$ est compact. En effet, soit $\mathcal{U} := \{U\}_{U \in \mathcal{U}}$ un recouvrement d'ouverts pour $K \cup \{0\}$. Alors il existe un ouvert $U_0 \in \mathcal{U}$ qui contient 0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 \in] - \varepsilon, \varepsilon[\cap (K \cup \{0\}) \subseteq U_0$$

et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Alors, pour tout $m \geq n$, on a $\frac{1}{m} \in] - \varepsilon, \varepsilon[\cap (K \cup \{0\}) \subseteq U_0$. Pour chaque $k < n$, on choisit $U_k \in \mathcal{U}$ tel que $\frac{1}{k} \in U_k$. Alors $\{U_k\}_{k=0}^{n-1}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$. □

Exercice 5. Par rapport aux topologies de la Série 1 Exercice 5 sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que $\mathbb{R}$ est compact?

Solution. On remarque d'abord que, si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine, alors $(X, \mathcal{T}')$ est compact aussi, parce que chaque recouvrement d'ouverts par rapport à $\mathcal{T}'$ l'est aussi par rapport à $\mathcal{T}$.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ *n'est pas compact,* comme on a vu dans l'Exercice 1.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{limsup})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$ *ne sont pas compacts* parce que ces topologies sont plus fines que la topologie standard.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{d\acute{e}n})$ *n'est pas compact.* Voici un recouvrement d'ouverts qui n'admet aucun sous-recouvrement fini:
$$\{\mathbb{R} \setminus \{m \in \mathbb{N} \mid m > n\}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{sup})$ *n'est pas compact.* Voici un recouvrement d'ouverts qui n'admet aucun sous-recouvrement fini:
$$\{(-\infty, n)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{fin})$ *est compact.* Supposons que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{R}$. Pour un $i_0 \in I$ fixé tel que U_{i_0} n'est pas vide, on a que son complémentaire
$$\mathbb{R} \setminus U_{i_0} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$
est fini. Soient $i_1, \ldots, i_k$ tels que $a_j \in U_{i_j}$. On a alors que
$$\{U_{i_j}\}_{j=0}^k$$
est bien un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{gr})$ *est compact,* car le seul recouvrement d'ouverts de $\mathbb{R}$ est $\{\mathbb{R}\}$. $\square$

Exercice 6.

(a) Montrer que tous les sous-espaces de $\mathbb{R}$ sont compacts par rapport à la topologie du complément fini $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Est-ce que l'intervalle $[0, 1]$ est compact par rapport à la topologie du complément dénombrable $\mathcal{T}_{\text{dén}}$ sur $\mathbb{R}$?

Solution.

(a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-espace. Alors la topologie de sous-espace induite sur A est aussi la topologie du complément fini. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de A par rapport à $\mathcal{T}_{\text{fin}}$. Soit $U \in \mathcal{U}$ un ouvert. Alors $A \setminus U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est fini, par définition de $\mathcal{T}_{\text{fin}}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on choisit un ouvert $U_i \in \mathcal{U}$ tel que $a_i \in U_i$. Alors $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{U\}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$. Cela montre que A est compact.

(b) $[0, 1]$ n'est pas compact par rapport à $\mathcal{T}_{\text{dén}}$. A nouveau, la topologie de sous-espace induite sur $[0, 1]$ est la topologie du complément dénombrable. Considérer $K = \{\frac{1}{k} \mid k \geqslant 1\} \subseteq [0, 1]$. Alors $\{U_n = ([0, 1]\setminus K) \cup \{\frac{1}{k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \mid n \geqslant 0\}$ est un recouvrement ouvert qui n'admet aucun sous-recouvrement fini. $\square$

Exercice 7. Quelle doit être la cardinalité d'un ensemble pour qu'il soit compact lorsqu'on le munit de la topologie

(a) discrète?

(b) grossière?

(c) du complément fini?

(d) du complément dénombrable?

Solution.

(a) L'ensemble X est compact par rapport à la topologie discrète si et seulement s'il est fini.

(b) L'ensemble X est toujours compact par rapport à la topologie grossière.

(c) L'ensemble X est toujours compact par rapport à la topologie du complément fini.

(d) L'ensemble X est compact par rapport à la topologie du complément dénombrable si et seulement s'il est fini. En fait, si $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dénombrable et infini de X, alors la famille $\{F_N\}$ définie par $F_N := \{x_k \mid k > N\}$ contredit la PIF. □

Exercice 8. (Compactifié d'Alexandrov)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X \cup \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ **ouvert** si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert, soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;

(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé.

Preuve.

(a) *$\dot{X}$ est un espace topologique compact.* En effet:

- L'ensemble vide est ouvert, car c'est un ouvert de X, et $\dot{X}$ est ouvert, car $\infty \in \dot{X}$ et $X \setminus \dot{X} = \varnothing$ est un compact fermé de X.
- On considère une réunion d'une famille d'ouverts $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\dot{X}$. Si tous les V_i sont contenu dans X, ils sont ouverts dans X et leur réunion l'est aussi.
  Sinon il existe un V_j qui contient ∞, et $X \setminus V_j$ est compact et fermé. Alors $\bigcup_{i \in I} V_i$ contient ∞ et son complémentaire dans X
  $$X \setminus (\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus V_i),$$
  est un fermé (car tous les $X \setminus V_i$ sont fermés) contenu dans le compact $X \setminus V_j$, donc il est compact et fermé. Ainsi $\bigcup_{i \in I} V_i$ est ouvert.
- On considère une intersection finie d'une famille d'ouverts $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\dot{X}$. S'il existe un V_j contenu dans X, l'intersection ne contient pas ∞ et on peut écrire
  $$\bigcap_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in I} (X \cap V_i),$$
  ce qui est ouvert dans X puisque c'est une intersection finie d'ouverts de X.
  Si tous les V_i contiennent ∞ et $X \setminus V_i$ sont compacts et fermés, alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ contient ∞ et son complémentaire dans X est
  $$X \setminus (\bigcap_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus V_j),$$
  ce qui est compact et fermé, puisque c'est une réunion finie de sous-espaces compacts et fermés.

Pour voir que $\dot{X}$ est compact, supposons qu'on ait un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\dot{X}$. En particulier, ∞ appartient à V_j pour un certain j et $X \setminus V_j$ est compact. Donc un nombre fini de V_i est suffisant pour recouvrir $X \setminus V_j$. En ajoutant V_j à ce recouvrement, on obtient un recouvrement fini de $\dot{X}$. Donc $\dot{X}$ est compact.

(b) *$(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé.* Par double inclusion, on voit que la topologie de sous-espace sur X coincide avec $\mathcal{T}$ et, par définition, X est ouvert par rapport à la topologie de $\dot{X}$. Donc son complémentaire $\{\infty\}$ est fermé. □

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie standard, et on considère le sous-espace

$$S := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}.$$

(a) Est-ce que S est fermé?

(b) Est-ce que S est compact?

Solution.

(a) Pour montrer que S n'est pas fermé, il suffit de montrer que

$$\{(0,t) \mid t \in [0,1]\} \subseteq \overline{S}.$$

Soit alors $P := (0,t)$, avec $t \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier $k > \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\varepsilon} - \arcsin t)$ et

$$Q := \left(\frac{1}{\arcsin t + 2k\pi}, t\right) \in B(P,\varepsilon) \cap S,$$

ce qui montre que $B(P,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$.

(b) Comme S n'est pas fermé (et même pas borné), d'après le Théorème de Heine-Borel, on conclut que S n'est pas compact. □

Exercice 10. Vrai ou Faux?

(a) La topologie produit de deux copies de la topologie standard sur $\mathbb{R}$ est la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$.

(b) La topologie produit de deux copies de la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ est la topologie cofinie sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. Seule l'assertion (a) est vraie.

(a) C'est une conséquence du fait que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, on a que

$$B_{\mathbb{R}^2}((x,y),\varepsilon) \subseteq B_{\mathbb{R}}(x,\varepsilon) \times B_{\mathbb{R}}(y,\varepsilon) \text{ et } B_{\mathbb{R}}(x,\varepsilon) \times B_{\mathbb{R}}(y,\varepsilon) \subseteq B_{\mathbb{R}^2}((x,y),\sqrt{2}\varepsilon)$$

et du lemme de comparaison des bases.

(b) On voit que la topologie produit n'est pas contenue dans la topologie du complément fini sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple, le complément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est fini, alors que celui de $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas. Donc

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \in (\mathcal{T}_{\text{fin}}^{\mathbb{R}} \star \mathcal{T}_{\text{fin}}^{\mathbb{R}}) \setminus \mathcal{T}_{\text{fin}}^{\mathbb{R}^2}.$$

Exercice 11. Soient $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $Y \subseteq X$, $Y' \subseteq X'$ deux sous-ensembles. Montrer que la topologie produit $\mathcal{T}|_Y \star \mathcal{T}'|_{Y'}$ et la topologie de sous-espace $(\mathcal{T} \star \mathcal{T}')|_{Y \times Y'}$ sur $Y \times Y'$ sont égales.

Preuve. On remarque d'abord que, pour tout $U \subseteq X$ et $U' \subseteq X'$, on a que

$$(U \cap Y) \times (U' \cap Y') = (U \times U') \cap (Y \times Y').$$

Ensuite, par l'Exercice 1 de la Série 3, on a que $\{(U \cap Y) \times (U' \cap Y') \mid U \in \mathcal{T} \text{ et } U' \in \mathcal{T}'\}$ engendre $\mathcal{T}|_Y \star \mathcal{T}'|_{Y'}$ et $\{(U \times U') \cap (Y \times Y') \mid U \in \mathcal{T} \text{ et } U' \in \mathcal{T}'\}$ engendre $(\mathcal{T} \star \mathcal{T}')|_{Y \times Y'}$. Les deux topologies sont donc égales vu qu'elles ont la même base.

Exercice 12. Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Montrer que

(a) si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont fermés, alors $A \times B \subseteq X \times Y$ est aussi fermé.

(b) si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont deux sous-ensembles, alors $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dans $X \times Y$.

Solution.

(a) On a que
$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$$
car $(x, y) \notin A \times B$ si et seulement $x \notin A$ ou $y \notin B$. Or, $X \setminus A$ et $Y \setminus B$ sont ouverts puisque $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont fermés. Ainsi $A \times B \subseteq X \times Y$ est fermé vu que son complémentaire est ouvert.

(b) Par (a), $\overline{A} \times \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \times B$, d'où $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$.
Inversément, si $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$, alors pour tout $x \in U \subseteq X$ ouvert et tout $y \in V \subseteq Y$ ouvert, on a que $U \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap B \neq \varnothing$. Soit $(x, y) \in W \subseteq X \times Y$ un ouvert. Alors, par définition de la base de la topologie produit, il existe $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ des ouverts tels que $(x, y) \in U \times V \subseteq W$. Alors
$$\varnothing \neq (U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B) \subseteq W \cap (A \times B).$$
Cela prouve que $(x, y) \in \overline{A \times B}$ et ainsi que $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$.
On conclut que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ $\square$