TOPOLOGIE - SÉRIE 3

L'exercice 6 peut être rendu pour le 13 mars 2019.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$.

(a) Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, alors $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une base de $\mathcal{T}_Y$.

(b) Soit $A \subseteq Y$. Montrer que l'adhérence de A par rapport à $\mathcal{T}_Y$ est égale à $\bar{A} \cap Y$, où $\bar{A}$ est son adhérence par rapport à $\mathcal{T}$.

Preuve. (a) Pour tout $y \in Y$, il est vrai que $y \in X$, car $Y \subseteq X$ et donc comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $y \in B$ (par $B1$). D'où, $y \in Y$ et $y \in B$, et alors $y \in B \cap Y$.

Ensuite, soit $B_1 \cap Y$ et $B_2 \cap Y$ tel que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et soit $y \in (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y)$. Remarquons alors que $(B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = (B_1 \cap B_2) \cap Y$, par associativité et commutativité de l'intersection. Par la propriété $B2$ de la base $\mathcal{B}$, on sait qu il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $y \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Mais alors $y \in B_3 \cap Y \subseteq (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y)$.

Donc, $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ est bien une base, vérifions qu'elle engendre bien $\mathcal{T}_Y$. Soit $B_j \in \mathcal{B}$, pour tout $j \in J$. Alors, $\bigcup_{j \in J}(B_j \cap Y) = (\bigcup_{j \in J} B_j) \cap Y$ (par les propriétés de l'intersection et l'union démontrés précédemment), donc comme $\mathcal{B}$ engendre $\mathcal{T}$, on a bien que cette base engendre la topologie $\mathcal{T}_Y$.

(b) On calcule

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^Y &= \bigcap_{A \subseteq C \subseteq Y,\ C \text{ fermé de } Y} C && \text{par définition} \\
&= \bigcap_{A \subseteq B \cap Y \subseteq Y,\ B \text{ fermé de } X} (B \cap Y) && \text{parce que } C = B \cap Y \text{ pour } B \text{ fermé de } X \\
&= \left(\bigcap_{A \subseteq B \cap Y \subseteq Y,\ B \text{ fermé de } X} B \right) \cap Y \\
&= \left(\bigcap_{A \subseteq B,\ B \text{ fermé de } X} B \right) \cap Y && \text{parce que } A \subseteq Y \\
&= \overline{A} \cap Y. && \text{par définition}
\end{aligned}
$$

Exercice 2. Par rapport aux sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, dire quand la topologie de sous-espace induite sur $\mathbb{N}$ est discrète. Et sur K? Et sur $K \cup \{0\}$?

Solution.

Pour $\mathbb{N}$:

- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{st}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$: Oui, parce qu'il l'est par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_K$: Oui, parce qu'il l'est par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$: Oui. □

Date: 6 mars 2019

Pour K:

- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{st}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$: Oui, parce qu'il l'est par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_{K}$: Oui, parce qu'il l'est par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$: Oui.

Pour $K \cup \{0\}$:

- $\mathcal{T}_{\text{st}}$: Non, parce que $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $K \cup \{0\}$ par rapport à la topologie standard.
- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$: Non.
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$: Non, parce qu'il ne l'est pas par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$: Non, parce qu'il ne l'est pas par rapport à $\mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $\mathcal{T}_{K}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$: Oui, parce qu'il l'est par rapport à $\mathcal{T}_{K}$.
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$: Oui.

Exercice 3. Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. Prouver que f est continue par rapport à $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$ si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall x' \in X\colon d(x,x') < \delta \;\Rightarrow\; d'\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Preuve. On remarque d'abord que la condition au-dessus est equivalente à la suivante:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(f(x),\varepsilon).$$

[$\Longrightarrow$] Puisque f est continue, on a que pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la préimage de la boule ouverte $B_Y(f(x),\varepsilon) \subseteq Y$ est ouverte et elle contient x. En particulier, on a qu'il existe une boule ouvert dans X de la forme $B_X(x,\delta)$ tel que $B_X(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$, et donc $f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(f(x),\varepsilon)$.

[$\Longleftarrow$] Soit $U \subseteq Y$ un ouvert, tel que $f^{-1}(U)$ n'est pas vide. On va montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Puisque U est ouvert et il contient $f(x)$, il y a une boule $B_Y(f(x),\varepsilon)$ qui est contenue dans U. En utilisant l'hypothèse on obtient $\delta > 0$ tel que $f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(f(x),\varepsilon)$, et donc $B_X(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$. Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert. □

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := |x| \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

est continue seulement en 0, par rapport à la topologie standard sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Posons $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{st}$.

La fonction est continue en 0. En effet, soit $U' \in \mathcal{T}$ tel que $f(0) = 0 \in U'$, on écrit $U' =]a,b[$ (dans la topologie standard) avec $a < 0 < b$. On calcule $f(]a,b[) = [0, \max(|a|,|b|)) \cap \mathbb{Q}$. Or ceci est bien inclus dans $]a,b[$. D'où, $\forall U' \in \mathcal{T}$ tel que $f(0) \in U'$, il existe

$$U := (-\min\{|a|,|b|\}, +\min\{|a|,|b|\}) \in \mathcal{T}$$

tel que $0 \in U$ et $f(U) \subseteq]a, b[$.

Soit maintenant, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors

$$f(x) = |x| \in]|x| - \varepsilon, |x| + \varepsilon[= U' \in \mathcal{T},$$

avec $\varepsilon = |x|/2 > 0$. Ainsi, observons que $0 \notin U'$. Mais, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a $0 \in f(U)$ pour tout $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, car il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $y \in U$, et donc $f(y) = 0 \in f(U)$. Ainsi, la fonction n'est pas continue en $x \in \mathbb{Q}$.

Pour finir, prenons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors, $f(x) = 0 \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, avec $\varepsilon = |x|/2 > 0$. Alors pour tout $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, il existe $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \cap U$, une suite croissante (lorsque x positif, décroissante lorsque x négatif) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Ainsi, il existe N tel que $|x_N - x| < \varepsilon$. Ainsi, $|x_N| > |x| - |x_N - x| > |x| - \varepsilon = |x|/2 = \varepsilon$. Donc $|x_N| \in f(U)$, n'appartient pas à $] - \varepsilon, \varepsilon[$. Ainsi, f n'est pas continue en $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Exercice 5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) := 2x \text{ et } g(x) := -x.$$

Par rapport aux sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, dire quand f et g sont des homéomorphismes.

Pour f:

- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{st}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$: Oui, parce que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a que $f^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, \frac{a}{2})$, qui est ouvert et $(f^{-1})^{-1}(-\infty, a) = f(-\infty, a) = (-\infty, 2a)$ qui est ouvert.
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$: Oui, parce que f et f^{-1} sont bijective et respecte la cardinalité.
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$: Oui, parce que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a que $f^{-1}([a, b)) = ([\frac{a}{2}, \frac{b}{2}))$, qui est ouvert et $(f^{-1})^{-1}([a, b)) = f([a, b)) = [2a, 2b)$ qui est ouvert .
- $\mathcal{T}_K$: Non, parce que $(f^{-1})^{-1}(\mathbb{R} \setminus K) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{k}\}_{k>0}$, qui n'est pas ouvert car aucun voisinage de 0 n'est contenu dans $R \setminus \{\frac{2}{k}\}_{k>0}$. Remarquez que f est cependant continue, car $R \setminus \{\frac{1}{2k}\}_{k>0}$ est ouvert dans T_K (cela vient du fait que $\{\frac{1}{2k}\}_{k>0}$ est contenu dans K).

Pour g:

- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{st}}$: Oui.
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$: Non, parce que $g^{-1}(-\infty, 0) = (-0, +\infty)$, qui n'est pas ouvert.
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$: Oui, parce que g et g^{-1} sont bijective et respecte la cardinalité.
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$: Non, parce que $g^{-1}([0, 1)) = ((-1, 0])$, qui n'est pas ouvert.
- $\mathcal{T}_K$: Non, parce que $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus K) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{k}\}_{k>0}$, qui n'est pas ouvert.

Exercice 6. Montrer que, par rapport à la topologie standard, tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas vides sont homéomorphes. Et les intervalles fermés?

Solution. On montre que tout intervalle ouvert (a, b) avec $a < b$ est homéomorphe à $(0, 1)$. Il suffit de considérer l'application

$$(a, b) \to (0, 1) \text{ définie par } x \mapsto \frac{x - 1}{b - a}.$$

Elle est bijective avec inverse

$$(0, 1) \to (a, b) \text{ définie par } y \mapsto (b - a)y + a.$$

Les deux sont continues car elles sont des applications linéaires.

Un argument similaire montre que tout intervalle fermé $[a, b]$ est homéomorphe à $[0, 1]$ si $a < b$. Si $a = b$, alors $[a, b] = \{a\}$, et tous singletons sont homéomorphes à $\{0\}$. $\square$

Exercice 7. Montrer qu'un espace topologique homéomorphe à un espace muni de la topologie discrète (resp. grossière) est aussi muni de la topologie discrète (resp. grossière). Montrer aussi que (X, T) est muni de la topologie discrète (resp. grossière) si et seulement si T_Y est la topologie discrète (resp. grossière) pour chaque sous-ensemble $Y \subseteq X$.

Preuve. Si $\varphi \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est un homéomorphisme, alors $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si $\varphi(U) \in \mathcal{T}'$. Donc, si une des deux topologies est discrètes, l'autre l'est également et de même pour le cas grossier.

On montre que $(X, \mathcal{T})$ a la topologie discrète si et seulement si $\mathcal{T}_Y$ est la topologie discrète pour tout sous-ensemble $Y \subseteq X$. [$\Rightarrow$] Pour $Y \subseteq X$, on considère $A \subseteq Y$ un sous-espace. Comme X a la topologie discrète, A est ouvert dans X et ainsi $A = A \cap Y$ est ouvert par rapport à $\mathcal{T}_Y$. [$\Leftarrow$] Il suffit de considérer le cas $Y = X$.

Le raisonnement est similaire pour le cas grossier. $\square$

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ des espaces topologiques homéomorphes. Montrer que si $(X, \mathcal{T})$ est métrisable, alors $(Y, \mathcal{T}')$ est aussi métrisable.

Preuve. Soit $\varphi \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ un homéomorphisme et soit $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ une métrique sur X telle que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. On définit $d' \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ par

$$d'(y, y') = d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(y'))$$

pour $y, y' \in Y$. Alors d' définit une métrique sur Y (à vérifier!). On montre que $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}'$ par double inclusion.

[$\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}'$] Soit $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Comme φ est un homéomorphisme, on a que $U \in \mathcal{T}'$ si et seulement si $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. Par définition de la base $\mathcal{B}_{d'}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d'}(\varphi(x), \varepsilon) \subseteq U$. Alors $B_d(x, \varepsilon) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ et donc $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}'$.

[$\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_{d'}$] Soit $U \in \mathcal{T}'$ et soit $y \in U$. Comme φ est un homéomorphisme, $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ et, par définition de la base $\mathcal{B}_d$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(\varphi^{-1}(y), \varepsilon) \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Alors $B_{d'}(y, \varepsilon) \subseteq U$ et $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Ainsi $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_{d'}$. $\square$

Exercice 9. Montrer que $S^1 \setminus \{(0,1)\}$, muni de la topologie de sous-espace de la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$, est homéomorphe à $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard.

Preuve. Soit $P := (1, 0) \in S^1$. Alors on définit la **projection stéréographique**

$$\varphi : S^1 \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de la façon suivante. Pour tous $Q \in S^1$ divers de P, $\varphi(Q)$ est l'ordonnée du (seul) point d'intersection entre la ligne déterminée par les point P et Q et la droite d'équation $\{x = 0\}$. En écrivant la formule explicite pour cette intersection-là, on obtient

$$\varphi(x, y) = \frac{y}{1 - x} \in \mathbb{R}.$$

L'application inverse

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \setminus \{P\}$$

existe et est donnée par

$$\psi(a) = \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, \frac{2a}{a^2 + 1}\right) \in S^1.$$

On peut trouver cette formule sachant que $\psi(a)$ est le point d'intersection (divers de P) entre le circle S^1 et la droite qui relie $(0, a)$ et P, d'équation $y = -ax + a$.

Les deux applications φ et ψ sont bien définies et continues, car rationelles. Donc ce sont des homéomorphismes. □

Exercice 10. On dit qu'une application $f \colon X \to Y$ entre espaces topologiques est **ouverte** si, pour tout $U \subseteq X$ ouvert, $f(U) \subseteq Y$ est aussi ouvert. Montrer qu'une application $f \colon X \to Y$ entre espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est bijective, continue et ouverte.

Preuve. Par définition d'un homéomorphisme, pour prouver l'affirmation, il suffit de montrer que, si $f \colon X \to Y$ est une application continue et bijective, alors son inverse est continu si et seulement f est ouverte.
Soit $U \subseteq X$ un ouvert. Alors

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \subseteq Y.$$

Donc $(f^{-1})^{-1}(U)$ est ouvert si et seulement si $f(U)$ est ouvert. En appliquant ce raisonnement à tous les ouverts U de X, on voit que f^{-1} est continue si et seulement si f est ouverte. □