TOPOLOGIE - SÉRIE 2

L'exercice 7 peut être rendu pour le 6 mars 2019.

Exercice 1 (Sous-bases).

(a) Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ et soit $\mathcal{S} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Trouver la topologie engendrée par $\mathcal{S}$ sur X.

(b) Décrire la topologie $\mathcal{T}$ sur la droite réelle $\mathbb{R}$ qui est engendrée par la famille

$$\mathcal{S} = \{[a, a+1]\}_{a\in\mathbb{R}}.$$

(c) Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie discrète $\mathcal{T}_{\text{disc}}$. Trouver une sous-base $\mathcal{S}$ pour $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ telle que $\mathcal{S}$ ne contient aucun singleton.

Preuve.

(a) Il nous faut d'abord définir la base engendrée par la sous-base. Par définition,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n \mid \{S_1, ..., S_n\} \subset \mathcal{S}, n \geqslant 1\}.$$

Commençons donc par $n = 1$. On a donc $\{a, b, c\}$, $\{c, d\}$ et $\{d, e\}$ qui appartiennent à $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Ensuite, lorsque $n = 2$, on fait toutes les intersections possibles de deux éléments de $\mathcal{S}$.

- $\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$,
- $\{a, b, c\} \cap \{d, e\} = \varnothing$,
- $\{c, d\} \cap \{d, e\} = \{d\}$.

Enfin, lorsque $n = 3$, on obtient $\{a, b, c\} \cap \{c, d\} \cap \{d, e\} = \varnothing$.
En prenant ensemble tous les résultats ci-dessus :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}.$$

Pour trouver maintenant la topologie, il suffit de prendre toutes les unions possibles d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.
Ainsi, (en considérant aussi les unions d'un seul élément), on obtient

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}, X\}.$$

(b) Pour obtenir la base engendrée par la sous-base, il nous faut faire toutes les intersections finies possibles d'éléments de $\mathcal{S}$. Remarquons qu'alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$[a-1, a] \cap [a, a+1] = \{a\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}.$$

De plus, toutes les réunions possibles d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ vont définir les ouverts de la topologie. Ainsi, $\{a\} \in \mathcal{T}$. Nous avons alors que la topologie définie par $\mathcal{S}$ est la topologie discrète, car, pour tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ est alors ouvert.

(c) $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, e\}\}$, car tous les singletons peuvent s'écrire comme une intersection de deux éléments de $\mathcal{S}$ et font donc partie de la base. Ainsi, ils sont des ouverts de la topologie. Comme en (b), la topologie engendrée par $\mathcal{S}$ est bien la topologie discrète.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subseteq$" ou "$\supseteq$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

Date: 6 mars 2019

(a) si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \overline{N}$;

(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;

(c) $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$;

(d) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$;

(e) $\bigcap_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} M_i}$;

Solution. (a) OUI; si $M \subseteq N$, alors $\overline{N}$ est un fermé qui contient M. Donc il faut qu'il contienne aussi $\overline{M}$.

(b) OUI; $\overline{M} \cup \overline{N}$ est un fermé qui contient $M \cup N$. Donc il contient $\overline{M \cup N}$; de l'autre côté, $\overline{M \cup N}$ est un fermé qui contient M et N, donc $\overline{M}, \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$, et ensuite $\overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$.

(c) NON; le même argument que celui dans (b) marche pour l'inclusion $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$, mais l'autre n'est pas verifiée. Il suffit de considérer la collection $A_n := [0, 1 - \frac{1}{n}]$, avec la topologie euclidienne; alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = [0, 1)$, cependant que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$.

(d) NON; comme $\overline{M} \cap \overline{N}$ est un fermé qui contient $M \cap N$, on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pourtant l'autre n'est pas verifiée. Par example, on peut considérer $M := [0, 1)$ et $N := [1, 2]$, avec la topologie euclidienne. Alors $\overline{M \cap N} = \varnothing$, mais $\overline{M} \cap \overline{N} = \{1\}$.

(e) NON; l'inclusion $[\supseteq]$ marche comme dans le cas de l'intersection finie, mais comme on vu dans (d) l'autre inclusion n'est pas verifiée même dans le cas fini.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que

(a) pour tout $A \subseteq X$, l'adhérence de A est donnée par

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

(b) pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, la boule fermée $\bar{B}(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ est vraiment fermée dans X.

(c) pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ est incluse dans la boule fermée $\bar{B}(x, \varepsilon)$, c'est-à-dire

$$\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon).$$

Preuve.

(a) $[\supseteq]$ Soit $x \in X$ tel que $d(x, A) = 0$ et soit $U \in \mathcal{T}_d$ tel que $x \in U$. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$. Comme $d(x, A) = 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$. Alors on a que $y \in B_d(x, \varepsilon) \cap A \subseteq U \cap A$ et ainsi $U \cap A \neq \varnothing$. Ceci montre que $x \in \bar{A}$.

$[\subseteq]$ Supposons que $x \in \bar{A}$. Alors on sait que, pour tout $U \in \mathcal{T}_d$ tel que $x \in U$, on a $A \cap U \neq \varnothing$. Comme $B_d(x, 1/n) \in \mathcal{T}_d$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe un $a_n \in A \cap B_d(x, 1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Ainsi, on obtient $0 \leqslant d(x, A) \leqslant d(x, a_n) < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Par la règle des deux gendarmes, on conclut que $d(x, A) = 0$.

(b) On va montrer que le complémentaire de toute boule fermée est ouvert. Soient $x \in X$, $\varepsilon > 0$ et $z \notin \bar{B}(x, \varepsilon)$. Alors $B(z, d(z, x) - \varepsilon) \subseteq X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$. En effet, si $w \in B(z, d(z, x) - \varepsilon)$, alors on a

$$d(x, z) \leq d(x, w) + d(w, z) < d(x, w) + (d(z, x) - \varepsilon),$$

d'où on obtient $d(x, w) > \varepsilon$, ce qui donne $w \in X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$.

(c) Puisque $\bar{B}(x, \varepsilon)$ est fermé et contient $B(x, \varepsilon)$, on a $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon)$.

Exercice 4. Soit X un ensemble.

(a) Montrer qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$ on a que $\{x\} \in \mathcal{T}$.

(b) Si X est fini, montrer qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$ on a que $\{x\}$ est fermé.

(c) Et pour X dénombrable?

(d) Montrer que la métrique

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases},$$

induit la topologie discrète sur X. Utiliser cet exemple pour montrer que l'inclusion $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon)$ de l'Exercice 3(c) peut être stricte.

(e) Si $|X| > 1$, montrer qu'il n'existe aucune métrique qui induit la topologie grossière sur X. *Indication: utiliser l'Exercice 3(b)*

Solution.

(a) Si la topologie $\mathcal{T}$ est discrète, clairement tout singleton $\{x\}$ est ouvert. De l'autre coté, si tout singleton est ouvert, pour n'importe quel sous-ensemble $S \subseteq X$, l'on peut écrire

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\},$$

qui est ouvert car réunion d'ouverts. Donc tout $S \subseteq X$ est ouvert et la topologie $\mathcal{T}$ est discrète.

(b) Si la topologie $\mathcal{T}$ est discrète, clairement tout singleton $\{x\}$ est fermé. De l'autre coté, si tout singleton est fermé et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini, pour tout singleton $\{x_i\}$, on peut écrire

$$\{x_i\} = \bigcap_{j \neq i} X \setminus \{x_j\},$$

qui est ouvert car intersection finie d'ouverts. Donc tout singleton est ouvert, et la topologie $\mathcal{T}$ est discrète.

(c) L'argument de (b) ne marche pas pour X dénombrable. Par exemple, dans $\mathbb{N}$ muni de la topologie du complément fini, tout singleton est fermé, cependant cette topologie n'est pas discrète.

(d) Il suffit de montrer que tout singleton $\{x\}$ est ouvert dans la topologie induite par la métrique d. Pour le voir, on peut écrire

$$\{x\} = B_d(x, \frac{1}{2}),$$

qui est une boule ouverte.

Si on considère maintenant l'ensemble $\{a, b\}$ muni de la métrique discrète d, alors

$$\overline{B(a, 1)} = \overline{\{a\}} = \{a\} \subsetneq \{a, b\} = \bar{B}(a, 1),$$

et donc l'inclusion montrée dans l'Exercice 3(c) est stricte.

(e) Supposons que la topologie grossière soit métrisable par une métrique d, et $x \neq y$ soient deux éléments distincts de X. D'après l'Exercice 3(b) on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $\bar{B}(x, \varepsilon)$ contient x et est fermée. Donc $\bar{B}(x, \varepsilon) = X$. Par conséquent, $y \in X = \bar{B}(x, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $d(x, y) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $d(x, y) = 0$, ce qui contredit le fait que $x \neq y$.

Exercice 5. Considérer les sept topologies sur $\mathbb{R}$ qu'on a vues dans la Série 1, Exercice 5. Pour chacune, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Solution. On va calculer l'adhérence de K dans chaque cas.

(a) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{st}}} = K \cup \{0\}$; en effet, chaque voisinage de 0 doit intersecter K, par contre pour tout $x \notin K \cup \{0\}$ on trouve un intervalle ouvert contenant x qui n'intersecte pas K.

(b) $\overline{K}^{\mathcal{T}_K} = K$; en effet, K est fermé par définition.

(c) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{fin}}} = \mathbb{R}$; en effet, l'adhérence de K doit être un fermé infini, donc c'est nécessairement $\mathbb{R}$.

(d) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{limsup}}} = K$; comme $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ est plus fine que $\mathcal{T}_K$ et K est fermé dans $\mathcal{T}_K$, il l'est aussi dans $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$.

(e) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{sup}}} = [0, +\infty)$; en effet, $[0, +\infty)$ est fermé et contient K. Donc on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pour l'autre, il suffit de remarquer que pour tout $y \geq 0$ les voisinages de y contiennent un intervalle de la forme d'un ouvert de base, qui doit nécessairement intersecter K.

(f) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{disc}}} = K$; en effet, par rapport à la topologie discrète tout sous-ensemble est fermé.

(g) $\overline{K}^{\mathcal{T}_{\text{gr}}} = \mathbb{R}$; en effet, l'adhérence de K doit être un fermé qui n'est pas vide, donc il est nécessairement $\mathbb{R}$.

Exercice 6 ($\star$). Considérons $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e., $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Solution. On rappelle que, lorsque la topologie sur X est engendrée par une base, $x \in \bar{A} \subseteq X$ si et seulement si pour tout ouvert de base B avec $x \in B$, $B \cap A \neq \varnothing$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa distance euclidienne standard $d(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ et de la base de la topologie standard de $\mathbb{R}^2$ associée à cette distance.

Si $a = b = 0$ alors $L = \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}^2$ tel que $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, 2$. Alors $d(x, q) < \varepsilon$ et donc $B(x, \varepsilon) \cap (L \cap \mathbb{Q}^2) \neq \varnothing$. Par conséquent, $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$.

Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $L = \{0\} \times \mathbb{R}$ et donc par un arguement similaire on obtient que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Si $b \neq 0$, la réponse dépend de la pente de la droite $p = -\frac{a}{b}$.

Si $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si $x \in L$ est tel que $x_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $x_2 \notin \mathbb{Q}$, (car sinon $p = \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Q}$) et donc $L \cap \mathbb{Q}^2 = \{0\}$, ce qui implique que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\}$.

Si $p \in \mathbb{Q}$ alors pour tout $x \in L$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q_1 \in \mathbb{Q}$ avec $|x_1 - q_1| < \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2|p|+2})$. Alors $q = (q_1, pq_1) \in L \cap \mathbb{Q}^2$ et $d(x, q) < (\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Par conséquent, $B(x, \varepsilon) \cap L \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$ et donc $L \subseteq \overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que L est fermé et donc contient $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. On a donc montré que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = L$.

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subseteq X$ un sous-espace. L'**intérieur** de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A:

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \subseteq A :\, U \in \mathcal{T}} U.$$

C'est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier, $\mathring{A} \subseteq A$, et A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Exercice 7. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre espaces topologiques. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue.

(ii) $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ pour tout $A \subseteq Y$.

(iii) $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$ pour tout $A \subseteq Y$.

Montrer par des exemples que les inclusions ci-dessus peuvent être strictes.

Preuve.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Comme f est continue et $\overline{A}$ est fermé, alors $f^{-1}(\overline{A})$ est fermé. De plus, comme $A \subseteq \overline{A}$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$. Ainsi $f^{-1}(\overline{A})$ est un fermé contenant $f^{-1}(A)$ et on a bien $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par la caractérisation en termes de fermés d'une application continue, il suffit de montrer que, si $C \subseteq X$ est fermé, alors $f^{-1}(C)$ est aussi fermé. Comme C est fermé, alors $C = \overline{C}$ et on a

$$f^{-1}(C) \subseteq \overline{f^{-1}(C)} \overset{(ii)}{\subseteq} f^{-1}(\overline{C}) = f^{-1}(C).$$

Ainsi $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$ est fermé.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Comme f est continue et $\mathring{A}$ est ouvert, alors $f^{-1}(\mathring{A})$ est ouvert. De plus, comme $\mathring{A} \subseteq A$, alors $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq f^{-1}(A)$. Ainsi $f^{-1}(\mathring{A})$ est un ouvert contenu dans $f^{-1}(A)$ et on a bien $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Par définition, il suffit de montrer que, si $U \subseteq X$ est un ouvert, alors $f^{-1}(U)$ est aussi ouvert. Comme U est ouvert, alors $U = \mathring{U}$ et on a

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathring{U}) \overset{(iii)}{\subseteq} \overset{\circ}{f^{-1}(U)} \subseteq f^{-1}(U).$$

Ainsi $f^{-1}(U) = \overset{\circ}{f^{-1}(U)}$ est ouvert.

On aurait aussi pu montrer:

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $A \subseteq Y$. Alors

$$\begin{aligned} X \setminus \overset{\circ}{f^{-1}(A)} &= \overline{X \setminus f^{-1}(A)} = \overline{f^{-1}(Y \setminus A)} \\ &\overset{(ii)}{\subseteq} f^{-1}(\overline{Y \setminus A}) = f^{-1}(Y \setminus \mathring{A}) = X \setminus f^{-1}(\mathring{A}). \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$.

Pour des exemples où l'inégalité est stricte, considérer l'inclusion $f\colon (\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$. Alors, par exemple, pour $A =]0,1[$, on a

$$\varnothing = \overline{\varnothing} = \overline{f^{-1}(\,]0,1[\,)} \subsetneq f^{-1}(\overline{]0,1[}) = f^{-1}([0,1]) = \{0,1\},$$

et, pour $A = [0,1]$, on a

$$\varnothing = f^{-1}(\,]0,1[\,) = f^{-1}(\overset{\circ}{[0,1]}) \subsetneq \overset{\circ}{f^{-1}([0,1])} = \overset{\circ}{\{0,1\}} = \{0,1\}.$$

Exercice 8. Considérons l'ensemble $X = \{a,b,c,d\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, X\},$$

et l'application $f : X \to X$ définie par

$$a \mapsto b,\ b \mapsto d,\ c \mapsto b,\ d \mapsto c.$$

Déterminer en chaque point de X si f est continue en ce point.

Solution. La formule pour la continuité en un point est

$$f \text{ est continue en } x \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \text{ tq } f(x) \in U\ \exists V \in \mathcal{T} \text{ tq } x \in V \text{ et } f(V) \subseteq U$$

L'application f est continue en a et b puisque $\{a\}$ et $\{b\}$ sont ouverts, i.e. on peut prendre $V = \{a\}$, respectivement $V = \{b\}$, dans la formule de la continuité en un point.

On montre que f n'est pas continue en c. La négation de la formule pour la continuité en un point est

$$f \text{ n'est pas continue en } x \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T} \text{ tq } f(x) \in U \text{ et } \forall V \in \mathcal{T} \text{ tq } x \in V, f(V) \not\subseteq U$$

On doit donc trouver un tel U pour $x = c$. Comme $f(c) = b$ on peut choisir $U = \{b\}$ qui est bien dans $\mathcal{T}$. Alors les seuls ouverts de $\mathcal{T}$ qui contiennent c sont $\{b, c, d\}$ et X. Comme ils contiennent tous les deux d, on a

$$\left.\begin{array}{c} f(\{b,c,d\}) \\ f(X) \end{array}\right\} \ni f(d) = c$$

Or $c \notin \{b\}$ et donc $f(\{b,c,d\}), f(X) \not\subseteq \{b\}$. Donc f n'est pas continue en c.

On montre que f est continue en d. Les seuls ouverts de $\mathcal{T}$ qui contiennent c sont $U_1 = \{b, c, d\}$ et $U_2 = X$. Dans les deux cas, on choisit $V = \{b, c, d\}$ qui est un choix valide car $d \in V$. Il faut vérifier que $f(V) \subseteq U_1$ et $f(V) \subseteq U_2$. Or, on voit que

$$f(V) = f(\{b, c, d\}) = \{b, c, d\}$$

qui est bien inclu U_1 et U_2. Donc f est donc continue en d. □

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si les ensembles $\{x\colon f(x) < \lambda\}$ et $\{x\colon f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. Supposons f continue. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x\colon f(x) > \lambda\} = f^{-1}(]\lambda, +\infty[)$ et $\{x\colon f(x) < \lambda\} = f^{-1}(] - \infty, \lambda[)$ sont ouverts comme préimage d'ouverts.
Pour l'autre implication, considérons un ouvert de base $]a, b[$ de la topologie standard de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble

$$f^{-1}(]a, b[) = \{x\colon a < f(x) < b\} = \{x\colon f(x) > a\} \cap \{x\colon f(x) < b\}$$

est ouvert comme intersection finie d'ouverts. Cela prouve que f est continue. □

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X. On considère la fonction indicatrice de A: $\chi_A\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que χ_A soit continue.

Solution. La fonction χ_A est continue si et seulement si $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$ et $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ soient ouverts (prendre un voisinage ouvert de 0 qui ne contient pas 1 dans $\mathbb{R}$, et inversément). Autrement dit, χ_A est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé. □