TOPOLOGIE - SÉRIE 1

L'exercice 2 est à rendre pour le 27 février 2019.

Exercice 1 (Caractérisation des ouverts).
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X. Démontrer que $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq A$.

Preuve. Le sens direct est évident, il suffit de prendre $U = A$ pour tout $x \in X$. Supposons en revanche que pour tout $x \in A$, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq A$. Alors $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ (à vérifier par double inclusion). Ainsi A est ouvert comme réunion d'ouverts. □

Exercice 2 (♣). Montrer que

(a) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{fin}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\} \cup \{\varnothing\}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie du complément fini**.

(b) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{dén}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est dénombrable}\} \cup \{\varnothing\}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie du complément dénombrable**.

(c) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{sup}} := \{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{]-\infty, a[\}_{a \in \mathbb{R}}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie supérieure**.

(d) la collection
$$\{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{]-\infty, q[\}_{q \in \mathbb{Q}}$$
n'est pas une topologie sur $\mathbb{R}$.

Preuve.

(a) On va montrer que $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ est bien une topologie.
- L'ensemble vide est un élément de $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ et $\mathbb{R}$ l'est aussi, car son complément est fini.
- En supposant que $\{U_i\}_{i \in I}$ est une collection d'ouverts non vides de $\mathcal{T}_{\text{fin}}$, pour n'importe quel $j \in I$, on a que
$$\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus U_i) \subseteq \mathbb{R} \setminus U_j,$$
qui est fini. Ainsi $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$.
- En supposant que $\{U_i\}_{i \in I}$ est une collection finie d'ouverts de $\mathcal{T}_{\text{fin}} \setminus \{\mathbb{R}\}$, on a que
$$\mathbb{R} \setminus (\bigcap_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus U_i),$$
qui est une réunion finie d'ensembles finis et est donc finie. Ainsi $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$.

(b) On va montrer que $\mathcal{T}_{\text{dén}}$ est bien une topologie.
- L'ensemble vide est un élément de $\mathcal{T}_{\text{dén}}$ et $\mathbb{R}$ l'est aussi, car son complément est dénombrable.

Date: 19 février 2019

- En supposant que $\{U_i\}_{i\in I}$ est une collection d'ouverts non vides de $\mathcal{T}_{\text{dén}}$, pour n'importe quel $j \in I$, on a que

$$\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathbb{R} \setminus U_i) \subseteq \mathbb{R} \setminus U_j,$$

qui est dénombrable. Ainsi $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{\text{dén}}$.
- En supposant que $\{U_i\}_{i\in I}$ est une collection finie d'ouverts de $\mathcal{T}_{\text{dén}} \setminus \{\mathbb{R}\}$, on a que

$$\mathbb{R} \setminus (\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R} \setminus U_i),$$

qui est une réunion finie d'ensembles dénombrables et est donc dénombrable. Ainsi $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{\text{dén}}$.

(c) On va montrer que $\mathcal{T}_{\text{sup}}$ est bien une topologie.
- L'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathcal{T}_{\text{sup}}$.
- En supposant que $\{(-\infty, a_i)\}_{i\in I}$ est une collection d'ouverts non vides de $\mathcal{T}_{\text{sup}}$, on a que

$$\bigcup_{i\in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, \sup_{i\in I} a_i)$$

qui est dans $\mathcal{T}_{\text{sup}}$.
- En supposant que $\{(-\infty, a_i)\}_{i\in I}$ est une collection finie d'ouverts non vides de $\mathcal{T}_{\text{sup}}$, on a que

$$\bigcap_{i\in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, \min_{i\in I} a_i)$$

qui est dans $\mathcal{T}_{\text{sup}}$.

(d) Cette collection ne donne pas une topologie sur $\mathbb{R}$. Plus précisement, il existe une réunion d'éléments de la collection qui n'est pas dans la collection.
Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres rationnels qui converge vers π. Par exemple, on peut prendre $q_0 := 3$, $q_1 := 3.1$, $q_2 := 3.14$, ... Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, q_n) = (-\infty, \pi),$$

qui n'est pas dans la collection (à montrer par double inclusion!).

Exercice 3. Soit A un ensemble quelconque, et $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille de topologies sur X.

(a) Est-ce que $\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X?

(b) Est-ce que $\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X?

Preuve.

(a) Montrons que l'intersection de topologies est toujours une topologie.
- $\varnothing, X \in \mathcal{T}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$, ainsi $\varnothing, X \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$.
- $\mathcal{U} \subset \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha \Longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Ainsi,

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \in \mathcal{T}_\alpha \ \forall \alpha \in A \Longrightarrow \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha.$$

- $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha \Longrightarrow \{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Ainsi,

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_\alpha \ \forall \alpha \in A \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha.$$

(b) La réunion d'une famille de topologies n'est pas nécessairement une topologie. Par example, sur l'ensemble $X := \{a, b, c\}$ on peut considérer les topologies $\{X, \varnothing, \{a\}\}$ et $\{X, \varnothing, \{c\}\}$. Leur réunion n'est pas une topologie parce qu'elle ne contient pas $\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\}$.

Exercice 4. Montrer que les collections suivantes sont des bases de topologie sur $\mathbb{R}$.

(a) $\mathcal{B}_K := \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, b[\setminus K \mid a < b \in \mathbb{R}\}$
où $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. L'on note $\mathcal{T}_K$ la topologie determinée par $\mathcal{B}_K$.

(b) $\mathcal{B}_{\text{limsup}} := \{]a, b] \mid a < b \in \mathbb{R}\}$.
La topologie $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ determinée par $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$ est appellée **topologie de la limite supérieure**.

Preuve. (a) On va montrer que $\mathcal{B}_K$ est bien une base de topologie.

- L'ensemble des intervalles de la forme $]a, b[$, où $a < b \in \mathbb{R}$, est suffisant pour recouvrir $\mathbb{R}$.
- Quand l'intersection $U \cap V$ entre deux ouverts $U, V \in \mathcal{B}_K$ n'est pas vide, elle est toujours un element de $\mathcal{B}_K$.

(b) On va montrer que $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$ est bien une base de topologie.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que $x \in]x - 1, x] \in \mathcal{B}_{\text{limsup}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{limsup}}$.
- Quand l'intersection $U \cap V$ entre deux ouverts $U, V \in \mathcal{B}_{\text{limsup}}$ n'est pas vide, elle est toujours un element de $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$.

Exercice 5. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_{\text{st}}$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_K$ = la topologie engendrée par $\mathcal{B}_K$;
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a, b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base;
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ = la topologie discrète;
- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ = la topologie grossière.

Comparer-les, et montrer que les seules inclusions de topologie sont exactement les suivantes.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}_{\text{fin}} \arrow[dr, hook] & & & & \\
\mathcal{T}_{\text{gr}} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{T}_{\text{st}} \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_K \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_{\text{limsup}} \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_{\text{disc}} \\
& \mathcal{T}_{\text{sup}} \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

Solution. On va le montrer.

- $[\mathcal{T}_{\text{gr}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{fin}}]$: c'est clair;
- $[\mathcal{T}_{\text{gr}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{sup}}]$: c'est clair;
- $[\mathcal{T}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{st}}]$: pour $x_1 < \cdots < x_n \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} =]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup \cdots \cup]x_{n-1}, x_n[\cup]x_n, \infty[,$$

  qui est un ouvert de $\mathcal{T}_{\text{st}}$;
- $[\mathcal{T}_{\text{sup}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{st}}]$: pour $a \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$]-\infty, a[= \bigcup_{b<a}]b-1, b[,$$

  qui est un ouvert de $\mathcal{T}_{\text{st}}$;
- $[\mathcal{T}_{\text{st}} \subseteq \mathcal{T}_K]$: la base de la topologie standard est incluse dans la base de $\mathcal{T}_K$;
- $[\mathcal{T}_K \subseteq \mathcal{T}_{\text{limsup}}]$: On montre cette inclusion par le lemme de comparaison des bases.
  Soit $a < b \in \mathbb{R}$.
  - pour $]a, b[\in \mathcal{T}_K$ et $x \in]a, b[$, on a que $x \in]a, x] \subseteq]a, b[$;
  - pour $]a, b[\setminus K \in \mathcal{T}_K$ et $x \in]a, b[\setminus K$, on a que
    - si $x \leqslant 0$, alors $x \in]a, x] \subseteq]a, b[\setminus K$;
    - si $0 < x \leqslant 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et $x \in]\max(a, \frac{1}{n+1}), x] \subseteq]a, b[\setminus K$;
    - si $x > 1$, alors $x \in]\max(a, 1), x] \subseteq]a, b[$.
- $[\mathcal{T}_{\text{limsup}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{disc}}]$: c'est clair;
- $[\mathcal{T}_{\text{disc}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\text{limsup}}]$: $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ ne contient pas les singletons;
- $[\mathcal{T}_{\text{limsup}} \not\subseteq \mathcal{T}_K]$: tout ouvert de $\mathcal{T}_K$ qui contient -1 doit contenir $]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Donc $]-2, -1] \in \mathcal{T}_{\text{limsup}} \setminus \mathcal{T}_K$;
- $[\mathcal{T}_K \not\subseteq \mathcal{T}_{\text{st}}]$; tout ouvert de $\mathcal{T}_{\text{st}}$ qui contient 0 doit contenir $]-\varepsilon, \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Donc $]-1, 1[\setminus \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{T}_K \setminus \mathcal{T}_{\text{limsup}}$;
- $[\mathcal{T}_{\text{fin}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\text{sup}}]$: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \mathcal{T}_{\text{fin}} \setminus \mathcal{T}_{\text{sup}}$;
- $[\mathcal{T}_{\text{sup}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\text{fin}}]$: $]0, +\infty[\in \mathcal{T}_{\text{sup}} \setminus \mathcal{T}_{\text{fin}}$.

Exercice 6. Soit $C[0,1]$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$ (par rapport à la définition (ε, δ) que vous connaissez du cours d'analyse).

(a) Montrer que d_1 et d_∞ ci-dessous définissent des métriques sur $C[0,1]$:

$$d_1 \colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_0^1 |fx - gx| \, \mathrm{d}x,$$

$$d_\infty \colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |fx - gx| \, .$$

(b) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_1$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_\infty$ induite par d_∞ (i.e. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_\infty$).

Preuve. On va montrer que d_1 et d_∞ sont des métriques. Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On a que

- $d_1(f,g) = \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x \geq 0$, puisque la fonction intégrée est positive;
- $d_1(f,g) = \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x = 0 \iff |fx - gx| = 0$ pour tout $x \in I \iff fx = gx$ pour tout $x \in I$;
- $d_1(f,g) = \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |gx - fx| \,\mathrm{d}x = d_1(g,f)$;
- Pour l'inégalité du triangle, on a que

$$\begin{aligned} d_1(f,h) = \int_0^1 |fx - hx| \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 |(fx - gx) + (gx - hx)| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 |(fx - gx)| + |(gx - hx)| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 |(fx - gx)| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |(gx - hx)| \,\mathrm{d}x \\ &= d_1(f,g) + d_1(g,h). \end{aligned}$$

Donc d_1 est bien une métrique. Ensuite, on a que

- $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |fx - gx| \geq 0$;
- $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |fx - gx| = 0 \iff |fx - gx| = 0$ pour tout $x \in I \iff fx = gx$ pour tout $x \in I$;
- $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |fx - gx| = \sup_{x\in[0,1]} |gx - fx| = d_\infty(g,f)$;
-

$$\begin{aligned} d_\infty(f,h) = \sup_{x\in[0,1]} |fx - hx| \,\mathrm{d}x &= \sup_{x\in[0,1]} |(fx - gx) + (gx - hx)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |(fx - gx)| + |(gx - hx)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |(fx - gx)| + \sup_{x\in[0,1]} |(gx - hx)| \\ &= d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h). \end{aligned}$$

Donc d_∞ est bien une métrique.

De plus, $\mathcal{T}_{d_\infty}$ est plus fine que $\mathcal{T}_{d_1}$. En effet, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |fx - gx| \,\mathrm{d}x = (\sup_{x\in[0,1]} |fx - gx|)(\int_0^1 \mathrm{d}x) \\ &= d_\infty(f,g) \cdot 1 = d_\infty(f,g). \end{aligned}$$

Cela signifie que pout tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, on a $B_{d_\infty}(f,r) \subseteq B_{d_1}(f,r)$ et ainsi $\mathcal{T}_{d_1} \subseteq \mathcal{T}_{d_\infty}$. □

Exercice 7 ($\star$).

(a) Montrer que la collection $\{a\mathbb{Z} + b\}_{a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{Z}}$ est une base de topologie pour $\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que chaque $a\mathbb{Z} + b$, avec $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$, est fermé et ouvert.

(c) Montrer que

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0).$$

(d) Conclure que il y a une infinité de nombres premiers.

Preuve.

(a) Il s'agit de vérifier que l'ensemble des $a\mathbb{Z}+b$ forme une base de topologie. Puisque $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}+0$, tout entier appartient à un ouvert de base. De plus, si $x \in (a\mathbb{Z}+b \cap a'\mathbb{Z}+b')$, alors $x \in aa'\mathbb{Z}+x \subseteq (a\mathbb{Z}+b) \cap (a'\mathbb{Z}+b')$.

(b) Si le reste dans la division de b par a est r, alors

$$a\mathbb{Z}+b = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{\substack{i=0,\dots,a-1 \\ i\neq r}} a\mathbb{Z}+i \right),$$

ce qui montre que $a\mathbb{Z}+b$ est fermé.

(c) L'égalité d'ensembles provient du fait que tout entier différent de $-1, 1$ est divisible par un nombre premier.

(d) Supposons par l'absurde qu'il existe seulement un nombre fini de nombres premiers. Alors $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ est une union finie de fermés, donc un fermé, ce qui implique que $\{-1, 1\}$ est un ouvert non vide.

Il suffit donc de montrer que tout ouvert non vide est infini pour obtenir une contradiction. Or tout ouvert non vide contient un ensemble de la forme $a\mathbb{Z}+b$, qui est en bijection avec $\mathbb{Z}$ et donc infini.