Topologie algébrique
Série 1

18.02.2019

L'exercice 5 est à rendre le 25.02.2019.

1. Un morphisme $f : A \to B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un *isomorphisme* s'il existe un autre morphisme $g : B \to A$ dans $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ and $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

   (a) Quels sont les isomorphismes dans Set, Top, et Gr? Et dans la catégorie BG provenant d'un groupe G?

   (b) Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Montrer que si $f : A \to B$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$. Est-ce que le contraire est vrai aussi?

2. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, et $\mathcal{E}$ des catégories.

   (a) Comment définir la composition pour qu'il a ait une catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ avec $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\mathcal{D}$ et

   $$\mathcal{C} \times \mathcal{D}\big((A, B), (C, D)\big) = \mathcal{C}(A, C) \times \mathcal{D}(B, D)?$$

   (b) Montrer que pour tout couple de foncteurs $F : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ and $G : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$, il y a un unique foncteur $(F, G) : \mathcal{E} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tel que $P_1 \circ (F, G) = F$ and $P_2 \circ (F, G) = G$, où $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ sont les foncteurs de "projection sur les coordonnées".

3. Montrer que les petites catégories (celles dont la classe des objets et les classes de morphismes entre deux objets fixes sont en fait des ensembles) et les foncteurs entre petites catégories forment aussi une catégorie, notée Cat. Décrire les morphismes de $\mathsf{Cat}^{\to}$.

4. Montrer que tout homomorphisme de groupes $\varphi : G \to H$ induit un foncteur $B\varphi : \mathsf{BG} \to \mathsf{BH}$, ce qui fait partie de la définition d'un foncteur $B : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Cat}$.

5. (Le groupoïde fondamental d'un espace topologique) Soit X un espace topologique. Expliquer comment former une catégorie $\Pi_1 X$ où $\mathrm{Ob}\Pi_1 X$ est l'ensemble sous-jacent à l'espace topologique X, et $\Pi_1 X(x, x')$ est l'ensemble des classe d'homotopie de chemins de tous les chemins de x vers x', pour tous $x, x' \in X$. Montrer que tout morphisme de $\Pi_1 X$ est un isomorphisme et que toute application continue $f : X \to Y$ induit un foncteur $\Pi_1 f : \Pi_1 X \to \Pi_1 Y$. Que peut-on dire si f est une équivalence d'homotopie? Montrer que Π_1 est en fait un foncteur de Top vers Cat.

6. Soient $G : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ et $D : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ les foncteurs qui munissent un ensemble de sa topologie grossière et de sa topologie discrète, respectivement. Soit $U : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ le foncteur oubli. Montrer qu'il y a des transformations naturelles $DU \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Top}} \Rightarrow GU$.