

TOPOLOGIE - SÉRIE 1

L'exercice 2 est à rendre pour le 27 février 2019.

Exercice 1 (Caractérisation des ouverts).

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X . Démontrer que $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq A$.

Exercice 2 (♣). Montrer que

- (a) la collection

$$\mathcal{T}_{\text{fin}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$$

est une topologie sur \mathbb{R} , ce qui l'on appelle la **topologie du complément fini**.

- (b) la collection

$$\mathcal{T}_{\text{dén}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}$$

est une topologie sur \mathbb{R} , ce qui l'on appelle la **topologie du complément dénombrable**.

- (c) la collection

$$\mathcal{T}_{\text{sup}} := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R}\}$$

est une topologie sur \mathbb{R} , ce qui l'on appelle la **topologie supérieure**.

- (d) la collection

$$\{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]-\infty, q[\mid q \in \mathbb{Q}\}$$

n'est pas une topologie sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit A un ensemble quelconque, et $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de topologies sur X .

- (a) Est-ce que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X ?
(b) Est-ce que $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X ?

Exercice 4. Montrer que les collections suivantes sont des bases de topologie sur \mathbb{R} .

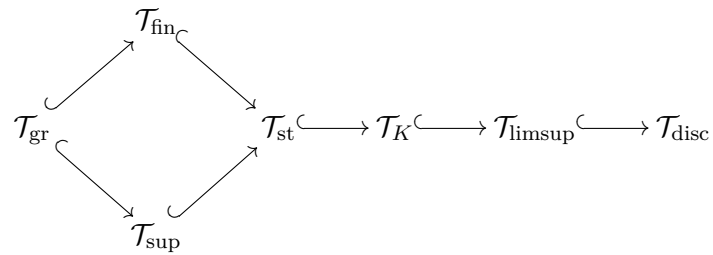
- (a) $\mathcal{B}_K := \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, b[\setminus K \mid a < b \in \mathbb{R}\}$
où $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. L'on note \mathcal{T}_K la topologie déterminée par \mathcal{B}_K .
(b) $\mathcal{B}_{\text{limsup}} := \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{R}\}$.

La topologie $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ déterminée par $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$ est appelée **topologie de la limite supérieure**.

Exercice 5. Considérer les topologies suivantes sur \mathbb{R} :

- \mathcal{T}_{st} = la topologie standard;
- \mathcal{T}_K = la topologie engendrée par \mathcal{B}_K ;
- \mathcal{T}_{fin} = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \emptyset$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a, b[$ comme base;
- \mathcal{T}_{sup} = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base;
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ = la topologie discrète;
- \mathcal{T}_{gr} = la topologie grossière.

Comparer-les, et montrer que les seules inclusions de topologie sont exactement les suivantes.



Exercice 6. Soit $C[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ à \mathbb{R} (par rapport à la définition (ε, δ) que vous connaissez du cours d'analyse).

(a) Montrer que d_1 et d_∞ ci-dessous définissent des métriques sur $C[0, 1]$:

$$d_1: C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 |fx - gx| dx,$$

$$d_\infty: C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \sup_{x \in [0, 1]} |fx - gx|.$$

(b) Montrer que la topologie \mathcal{T}_1 induite par d_1 est moins fine que la topologie \mathcal{T}_∞ induite par d_∞ (i.e. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_\infty$).

Exercice 7 (★).

(a) Montrer que la collection $\{a\mathbb{Z} + b\}_{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}}$ est une base de topologie pour \mathbb{Z} .

(b) Montrer que chaque $a\mathbb{Z} + b$, avec $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$, est fermé et ouvert.

(c) Montrer que

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0).$$

(d) Conclure que il y a une infinité de nombres premiers.