TOPOLOGIE - SÉRIE 1

L'exercice 2 est à rendre pour le 27 février 2019.

Exercice 1 (Caractérisation des ouverts).
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X. Démontrer que $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq A$.

Exercice 2 (♣). Montrer que

(a) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{fin}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\} \cup \{\varnothing\}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie du complément fini**.

(b) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{dén}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est dénombrable}\} \cup \{\varnothing\}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie du complément dénombrable**.

(c) la collection
$$\mathcal{T}_{\text{sup}} := \{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{]-\infty, a[\}_{a\in\mathbb{R}}$$
est une topologie sur $\mathbb{R}$, ce qui l'on appelle la **topologie supérieure**.

(d) la collection
$$\{\mathbb{R}, \varnothing\} \cup \{]-\infty, q[\}_{q\in\mathbb{Q}}$$
n'est pas une topologie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit A un ensemble quelconque, et $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille de topologies sur X.

(a) Est-ce que $\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X?

(b) Est-ce que $\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie sur X?

Exercice 4. Montrer que les collections suivantes sont des bases de topologie sur $\mathbb{R}$.

(a) $\mathcal{B}_K := \{]a,b[\mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a,b[\setminus K \mid a < b \in \mathbb{R}\}$
où $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. L'on note $\mathcal{T}_K$ la topologie determinée par $\mathcal{B}_K$.

(b) $\mathcal{B}_{\text{limsup}} := \{]a,b] \mid a < b \in \mathbb{R}\}$.
La topologie $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ determinée par $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$ est appellée **topologie de la limite supérieure**.

Exercice 5. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_{\text{st}}$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_K$ = la topologie engendrée par $\mathcal{B}_K$;
- $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a,b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_{\text{sup}}$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base;
- $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ = la topologie discrète;
- $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ = la topologie grossière.

Date: 17 février 2019

Comparer-les, et montrer que les seules inclusions de topologie sont exactement les suivantes.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_{\text{fin}} \arrow[dr, hook] & & & & \\
\mathcal{T}_{\text{gr}} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{T}_{\text{st}} \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_K \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_{\text{limsup}} \arrow[r, hook] & \mathcal{T}_{\text{disc}} \\
 & \mathcal{T}_{\text{sup}} \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

Exercice 6. Soit $C[0,1]$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$ (par rapport à la définition (ε, δ) que vous connaissez du cours d'analyse).

(a) Montrer que d_1 et d_∞ ci-dessous définissent des métriques sur $C[0,1]$:

$$d_1 \colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x,$$

$$d_\infty \colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |fx - gx|\,.$$

(b) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_1$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_\infty$ induite par d_∞ (i.e. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_\infty$).

Exercice 7 ($\star$).

(a) Montrer que la collection $\{a\mathbb{Z} + b\}_{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}}$ est une base de topologie pour $\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que chaque $a\mathbb{Z} + b$, avec $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$, est fermé et ouvert.

(c) Montrer que

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0).$$

(d) Conclure que il y a une infinité de nombres premiers.