UNE PREUVE DU LEMME DE PROLONGMENT DE TIETZE

Définition 1. Soient X un espace topologique, et $A, B \subseteq X$ des sous-espaces. Si $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, alors A et B sont dits **séparés**.

Définition 2. Soient X un espace topologique, et $A \subseteq X$ un sous-espace. Si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, où chaque F_i est fermé, alors A est dit $\mathbf{F}_\sigma$. En outre, A est dit $\mathbf{G}_\delta$ si $X \setminus A$ est F_σ ou, de façon équivalente, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ où chaque U_i est ouvert.

Par exemple, c'est clair qu'un sous-ensemble fermé est F_σ, et que deux fermés disjoints sont séparés. Remarquons que l'on peut remplacer les fermés F_i par des fermés F_i' tels que $F_1' \subseteq F_2' \subseteq \cdots$ et $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i'$. On prend simplement $F_i' = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_i$. Maintenant, on va voir que, dans un espace normal, deux sous-espaces séparés et F_σ peuvent être séparés par deux ouverts, ce qui nous donne un moyen de travailler avec des sous-espaces qui ne sont pas forcément fermés.

Lemme 3. *Soient X un espace normal, $A, B \subseteq X$ des sous-espaces séparés qui sont tous les deux F_σ. Alors, il existe deux ouverts $U, V \subseteq X$ tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, et $U \cap V = \emptyset$.*

Preuve. On va construire U et V par la même méthode que l'on a utilisée dans la preuve qu'un espace régulier qui admet une base dénombrable est normal.

Soient C_i, F_i pour $i \geq 1$ des fermés tels que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $C_i \subseteq C_{i+1}$ et $F_i \subseteq F_{i+1}$.

On construit par récurrence, des ouverts V_i et W_i. D'abord, on peut trouver un ouvert U_1 tel que

$$C_1 \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq X \setminus \overline{B}.$$

Ensuite, il y a un ouvert V_1 tel que

$$F_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X \setminus (\overline{A} \cup \overline{U_1}).$$

Supposons que l'on ait déjà construit des ouverts $U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n$ et $V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n$ tels que $C_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq X \setminus \overline{B}$, $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq X \setminus \overline{A}$, $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\overline{U_i} \cap \overline{V_{i-1}} = \emptyset$ pour $1 < i \leq n$. Observons que U_1 et V_1 vérifient l'hypothèse.

Il existe premièrement un ouvert U_{n+1} tel que

$$C_{n+1} \cup \overline{U_n} \subseteq U_{n+1} \subseteq \overline{U_{n+1}} \subseteq X \setminus (\overline{B} \cup \overline{V_n}).$$

Puis, il existe un ouvert V_{n+1} tel que

$$F_{n+1} \cup \overline{V_n} \subseteq V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq X \setminus (\overline{A} \cup \overline{U_{n+1}}).$$

Il est facile à voir que l'hypothèse est toujours vérifiée pour $n + 1$.

Enfin, on pose $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ et $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, et avec les propriétés ci-dessus on peut montrer que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, et $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Notation. Soient X un espace topologique et $C \subseteq A \subseteq X$ des sous-espaces. On utilise la notation $\mathrm{Int}_A(C)$ pour l'intérieur de C dans A, c-à-d la réunion de tous les ouverts dans A qui sont contenus dans C. On fait cela pour le distinguer de l'intérieur dans X, que l'on note par $\mathring{C} = \mathrm{Int}_X(C)$. Notons que $\mathring{C} \cap A \subseteq \mathrm{Int}_A(C)$, mais les deux ensembles ne sont pas toujours égaux.

Corollaire 4. *Soient X un espace normal, et $A \subseteq G \subseteq X$ des sous-espaces tels que A soit F_σ, G soit G_δ, et A et $X \setminus G$ soient séparés. Alors, il existe un fermé $Z \subseteq X$ tel que $A \subseteq \mathring{Z} \subseteq Z \subseteq G$.*

Preuve. Par le lemme, on a deux ouverts U, V tels que $A \subseteq U$, $X \setminus G \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$. Observons que

$$\overline{U} \cap (X \setminus G) \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset,$$

car $U \cap V = \emptyset$ et alors $\overline{U} \subseteq X \setminus V$. Par conséquent, $\overline{U} \subseteq G$, et on peut donc poser $Z = \overline{U}$, et le résultat s'en suit. □

On doit trouver une caractérisation relative de la normalité, mais cette fois en ajoutant la condition F_σ.

Lemme 5 (CR)**.** *Soient X un espace normal, $A, Y \subseteq X$ des fermés. Si $U \subseteq X$ est un ouvert tel que $Y \subseteq U$, $C \subseteq A$ est un fermé tel que $A \setminus C$ est un sous-espace F_σ (ou, de façon équivalente, C est G_δ dans A, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts dans A) et $S \subseteq C$ est un sous-espace F_σ tels que*

$$Y \cap A \subseteq S \subseteq \mathrm{Int}_A(C) \subseteq C \subseteq U \cap A,$$

alors il existe un $Z \subseteq X$ fermé tel que

$$Y \subseteq \mathring{Z} \subseteq Z \subseteq U,$$

$$Z \cap A = C \text{ et}$$

$$S \subseteq \mathring{Z}.$$

C'était le manque de la dernière inclusion qui m'a conduit à un problème. L'inclusion $S \subseteq \mathring{Z} \cap A$ est la propriété clé pour faire marcher la récurrence dans la preuve du lemme de prolongement de Tietze. Malheureusement, la preuve est devenue encore plus technique qu'avant.

Ce lemme, alors qu'il n'est pas très plaisant, si on prend $A = \emptyset$, il se réduit à la caractérisation de la normalité que l'on a vue dans le cours. On verra tout de suite qu'il donne exactement ce qu'il faut pour démontrer le lemme de Tietze.

Preuve. Il suffit de trouver un fermé Z' tel que $Y \subseteq \mathring{Z}' \subseteq Z' \subseteq U$, $Z' \cap A \subseteq C$, et $S \subseteq \mathring{Z}'$. À partir de là, on peut ensuite poser $Z = Z' \cup C$ et les trois conditions sont faciles à vérifier.

Trouvons l'ensemble Z'. On vérifie d'abord que les deux sous-espaces F_σ, $D = (A \setminus C) \cup (X \setminus U)$ et $Y \cup S$, sont séparés. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\overline{D} \cap (Y \cup S) &\subseteq (\overline{A \setminus C} \cap (Y \cup S)) \cup ((X \setminus U) \cap (Y \cup S)) \\
&= \overline{A \setminus C} \cap ((Y \cap A) \cup S) \cup \emptyset \\
&\subseteq (A \setminus \mathrm{Int}_A(C)) \cap ((Y \cap A) \cup S) \\
&\subseteq (A \setminus \mathrm{Int}_A(C)) \cap \mathrm{Int}_A(C) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Puisque $Y \subseteq U$ est fermé, $\overline{S} \subseteq C \subseteq U \cap A$ et $Y \cap A \subseteq C \subseteq U \cap A$, on a

$$\begin{aligned} D \cap \overline{Y \cup S} &\subseteq ((A \setminus C) \cap (Y \cup \overline{S})) \cup ((X \setminus U) \cap (Y \cup \overline{S})) \\ &= ((A \setminus C) \cap ((Y \cap A) \cup \overline{S})) \cup \emptyset \\ &= (A \setminus C) \cap \overline{S} \\ &\subseteq \emptyset. \end{aligned}$$

Ensuite, par le corollaire, il existe un fermé Z' tel que

$$Y \cup S \subseteq \mathring{Z}' \subseteq Z' \subseteq X \setminus D = (X \setminus (A \setminus C)) \cap U.$$

Alors, on a que

$$Y \subseteq \mathring{Z}' \subseteq Z' \subseteq U$$
$$Z' \cap A \subseteq (X \setminus (A \setminus C)) \cap A = C \text{ et}$$
$$S \subseteq \mathring{Z}'.$$

□

Démontrons le théorème !

Théorème 6 (Lemme de prolongement de Tietze)**.** *Soient X un espace normal, $A \subseteq X$ un sous-espace, et $f_0 : A \to I$ une application continue. Alors, il existe un prolongement $f : X \to I$ de f_0, c-à-d pour tout $a \in A$, on a que $f(a) = f_0(a)$.*

Preuve. Posons $B_n = \{0, 1/2^n, \ldots, (2^n - 1)/2^n, 1\}$ et $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Remarquons que $\overline{B} = I$. Puis, pour $r \in B$, posons $A(r) = \{x \in A \mid f_0(x) \leq r\}$ et $O(r) = \{x \in A \mid f_0(x) < r\}$.

Par récurrence sur n, on va construire des fermés $X(r)$ pour tout $r \in B$ tels que

(1) $X(r) \cap A = A(r)$,

(2) Si $r < s$, alors $X(r) \subseteq \mathring{X}(s)$,

(3) $O(r) \subseteq \mathring{X}(r)$.

Avant de continuer, je veux dire quelques mots sur l'idée derrière cette preuve. On doit penser aux ensembles $X(r)$ comme étant $\{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ où $f : X \to I$ est l'application que l'on veux construire. On a vu en classe (et on peut le revoir ci-dessous) que les deux premières propriétés suffissent pour construire le prolongement. Observons que si on avait déjà un prolongement $f : X \to I$ de f_0 et on définissait $X(r) = \{x \in X \mid f(x) \leq r\}$, alors les ensembles $X(r)$ vérifieraient les trois conditions. La troisième condition nous permet de faire une récurrence pour les construire.

Pour $r \in B_0 = \{0, 1\}$, on prend $X(0) = A$ et $X(1) = X$. Les trois conditions sont faciles à vérifier.

Supposons que l'on ait déjà construit $X(r)$ pour $r \in B_n$ qui vérifient les trois conditions. On doit trouver $X(r)$ pour tout $r \in B_{n+1} \setminus B_n$. Alors, pour $i/2^n \in B_n$, où $0 \leq i < 2^n$, il suffit de construire un fermé $X((2i+1)/2^{n+1})$ tel que

(1) $X((2i+1)/2^{n+1}) \cap A = A((2i+1)/2^{n+1})$,

(2) $X(i/2^n) \subseteq \mathring{X}((2i+1)/2^{n+1})$, $X((2i+1)/2^{n+1}) \subseteq \mathring{X}((i+1)/2^n)$ et

(3) $O((2i+1)/2^{n+1}) \subseteq \mathring{X}((2i+1)/2^{n+1})$.

Pour faire cela, on peut prendre

– $Y = X(i/2^n)$,

– $U = \mathring{X}((i+1)/2^n)$,
– $C = A((2i+1)/2^{n+1})$,
– $S = O((2i+1)/2^{n+1})$ et
– $A = A$

dans le lemme CR. Notons que pour tout $r \in B$, on a que $A(r)$ est fermé (dans A et donc dans X) et G_δ dans A, que $O(r)$ est ouvert dans A et F_σ (même dans X parce que A est fermé) et que $O(r) \subseteq \mathrm{Int}_A(A(r))$. Par exemple, pour $0 < r$, on a que $O(r) = \bigcup_{s \in B\, s<r} A(s)$. Par les hypothèses sur les $X(r)$ pour $r \in B_n$, on voit que les hypothèses du lemme CR sont vérifiées. Faisons attention à la condition qui a changé. En effet,

$$A((2i+1)/2^{n+1}) \subseteq O((i+1)/2^n) \subseteq \mathring{X}((i+1)/2^n)$$

par la troisième condition ci-dessus, autrement dit : $C \subseteq U \cap A$. Si on n'avait pas la troisième condition, on ne pourrait pas appliquer le lemme CR. Dans le cours, j'ai résolu ce problème autrement, mais la récurrence n'a pas marché parce que je ne pouvait pas démontrer l'inclusion $A((4i+3)/2^{n+1}) \subseteq \mathring{X}((i+1)/2^n)$. J'ai caché le manque de cette inclusion par ne pas la mentionner.

Le lemme CR nous donne alors un Z que l'on renomme $X((2i+1)/2^{n+1}) = Z$, tel que

$$Y \subseteq \mathring{Z} \subseteq Z \subseteq U,$$
$$Z \cap A = C \text{ et}$$
$$S \subseteq \mathring{Z}.$$

En traduisant tout cela en termes des $X(r)$, $A(r)$ et $O(r)$, on conclut que les $X(r)$ pour $r \in B_{n+1}$ vérifient toujours les trois conditions.

Maintenant, avec les ensembles $X(r)$ on définit $f(x) = \inf\{r \in B \mid x \in X(r)\}$. Le reste de la preuve est comme dans le cours. Mais pour s'amuser, refaisons-le. D'abord, par la première condition, si $a \in A$, on a que

$$\begin{aligned} f(a) &= \inf\{r \in B \mid a \in X(r)\} \\ &= \inf\{r \in B \mid a \in A(r)\} \\ &= \inf\{r \in B \mid f_0(a) \le r\} \\ &= f_0(a). \end{aligned}$$

Alors, f est un prolongement de f_0 à tout l'espace X.

Enfin, on va montrer la continuité de f. Notons que les intervalles $[0, r[$ et $]s, 1]$, où $r, s \in I$, forment une sous-base pour la topologie de $I = [0, 1]$. Il suffit alors de montrer que $f^{-1}([0, r[)$ et $f^{-1}(]s, 1])$ sont ouvert pour $r, s \in I$. Si $f(x) < r$, alors il existe $r', r'' \in B$ tels que $f(x) < r'' < r' < r$, et $x \in X(r'')$, et donc $x \in \mathring{X}(r')$. Réciproquement, si $x \in X(r')$, où $r' < r$ et $r' \in B$, alors on a que $f(x) \le r' < r$. On en déduit que $f^{-1}([0, r[) = \bigcup_{r' \in B, r' < r} \mathring{X}(r')$, ce qui est ouvert. De façon semblable, si $s < f(x)$, alors il existe $s' \in B$ tel que $s < s' < f(x)$, et alors $x \notin X(s')$. Réciproquement, si $s < s'$, où $s' \in B$, et $x \notin X(s')$, alors $f(x) > s$, sinon alors il existerait $s'' \in B$ tel que $f(x) \le s'' < s'$ et $x \in X(s'') \subseteq X(s')$, ce qui serait contradictoire. On voit donc que $f^{-1}(]s, 1]) = \bigcup_{s' \in B, s' > s} X \setminus X(s')$, ce qui est ouvert. □

Corollaire 7 (Lemme d'Urysohn)**.** *Soient X un espace normal, $A, B \subset X$ des fermés tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors, il existe une application continue $f : X \to I$ tel que $f(A) \subseteq \{0\}$ et $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Preuve. Le sous-espace $A' = A \cup B$ est fermé, et par le lemme de recollement (par exemple) l'application $f_0 : A' \to I$ définit par $f_0(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f_0(x) = 1$ pour $x \in B$ est continue. Par le lemme de prolongment de Tietze, on peut étendre f_0 en une application continue $f : X \to I$, d'où le résultat. $\square$

Pour finir, on va démontrer une version du lemme de prolongment où le codomaine est $\mathbb{R}$.

Corollaire 8. *Soient X un espace normal, $A \subseteq X$ un sous-espace fermé, et $f_0 \colon A \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors, il existe une application continue $f \colon X \to \mathbb{R}$ telle que pour $a \in A$, $f(a) = f_0(a)$.*

Preuve. On a déjà vu que $\mathbb{R} \cong]0,1[$ et alors on peut étendre f_0 (composée avec l'homéomorphisme ci-dessus) en une application continue $g : X \to I$. Il faut montrer que l'on peut trouver un tel prolongement qui prend ses valeurs dans $]0,1[$. On applique le lemme d'Urysohn aux fermés $g^{-1}(0)$ et A (qui sont disjoints), et on trouve une application continue $\phi : X \to I$ telle que $\phi(g^{-1}(0)) \subseteq \{1\}$ et $\phi(A) \subseteq \{0\}$. Ensuite, on pose $g' = \max(g, \phi)$ et on voit que g' est une application continue telle que $g' : X \to]0,1]$ et $g'|_A = f_0$.

Quitte à reparamétriser le codomaine, on applique encore le lemme d'Urysohn pour trouver une application continue $\psi : X \to [1/2, 1]$ telle que $\psi(g'^{-1}(1)) \subseteq \{1/2\}$ et $\psi(A) \subseteq \{1\}$. Enfin, on pose $f = \psi g'$, et on voit d'abord que $f > 0$ car g' et ψ le sont aussi. Si $g'(x) = 1$ alors $\psi(x) = 1/2$ et donc $f(x) = 1/2 < 1$, si $g'(x) < 1$, alors $f(x) \leq g(x) < 1$. Il s'en suit que $f < 1$. Puisque $\psi(a) = 1$ pour $a \in A$, on a que $f(a) = g'(a) = f_0(a)$ pour $a \in A$. $\square$