TOPOLOGIE - SÉRIE 1

Exercice 1. Soit $f\colon A \to B$ une application. Prouver que

(a) $A' \subseteq f^{-1}fA'$ pour tout $A' \subseteq A$, avec égalité si f est injective;

(b) $ff^{-1}B' \subseteq B'$ pour tout $B' \subseteq B$, avec égalité si f est surjective;

Exercice 2. Pour une application $f\colon A \to B$ montrer que

(a) l'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments; i.e. pour tous B', $B'' \subseteq B$ et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ avec $B_i \subseteq B$

$$B' \subseteq B'' \;\Rightarrow\; f^{-1}B' \subseteq f^{-1}B'', \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}B_i,$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}B_i \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}B';$$

(b) l'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions, i.e. pour tous A', $A'' \subseteq A$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ avec $A_i \subseteq A$

$$A' \subseteq A'' \;\Rightarrow\; f(A') \subseteq f(A'') \quad \text{et} \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Définition. En notant $\mathfrak{P}X$ pour l'ensemble des parties d'un ensemble X, un *filtre* sur X est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}X$ non-vide tel que

(a) si A, $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous intersections finies);

(b) si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B \in \mathcal{F}$. (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous extensions)

En particulier, on a $X \in \mathcal{F}$. Un tel filtre $\mathcal{F}$ est dit *propre* si et seulement si de plus

(c) $\mathcal{F} \neq \mathfrak{P}X$ ou de manière équivalente $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Notons $\mathrm{Flt}(X)$ pour l'ensemble des filtres sur X, qui est partiellement ordonné par inclusion. Parce que le filtre non propre $\mathcal{F} = \mathfrak{P}X$ n'est pas très intéressant, tous les filtres sont supposés propres sauf si dit autrement. Finalement, un filtre propre $\mathcal{F}$ est appelé *ultrafiltre* si et seulement si pour tous A, $B \subseteq X$

(d) $A \cup B \in \mathcal{F}$ implique $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 3. Pour $x \in X$, montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_x := \Uparrow\{x\} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ est un ultrafiltre, appelé *l'ultrafiltre principal* engendré par x.

Exercice 4. Soit X un ensemble arbitraire. Montrer que

(a) l'intersection $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ d'une famille des filtres $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est aussi un filtre;

(b) pour $S \subseteq \mathfrak{P}X$ un ensemble de parties, l'ensemble

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in S\colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}$$

est le plus petit filtre (peut être non propre) qui contient S; i.e. $\mathcal{F}_X S$ est *engendré* par S;

(c) si l'ensemble S de (b) satisfait $\varnothing \notin S$ et pour chaque A, $B \in S$, il y a $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$ (on dit que S est une *base* de filtre), alors $\mathcal{F}_X S$ est propre.

Une propriété importante des ultrafiltres (que l'on va montrer plus tard dans le cours):

Théorème de l'Ultrafiltre. Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.

TOPOLOGIE - SÉRIE 2

Exercice 1. Pour un espace topologique X et $M \subseteq X$, montrer que M est ouvert si et seulement si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x \in U \subseteq M$.

Exercice 2. On définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (appelé la *topologie des entiers uniformément espacés*) comme suit:

$$U \subseteq \mathbb{Z} \text{ est ouvert } :\Leftrightarrow \quad U \text{ est une réunion d'ensembles de la forme } a\mathbb{Z} + b$$

(où a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ et où $a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}$). Montrer que

(a) c'est vraiment une topologie sur $\mathbb{Z}$;

(b) les $a\mathbb{Z} + b$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ sont fermés (i.e. leurs compléments sont ouverts) et ouverts (*clopen* en anglais);

(c) $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0)$ et donc, en notant qu'un ensemble non vide et fini $U \subseteq \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert, qu'il y a une infinité des nombres premiers.

Exercice 3. Vrais ou faux?

(a) Un espace topologique est discret (i.e. chaque $U \subseteq X$ est ouvert) si et seulement si chaque singleton $\{x\} \subseteq X$ est ouvert.

(b) Pour un espace topologique fini X, si tout singleton $\{x\} \subseteq X$ est fermé (i.e. $X \setminus \{x\} \subseteq X$ est ouvert) alors la topologie sur X est la topologie discrète (i.e. tout $U \subseteq X$ est ouvert).

(c) Et pour X dénombrable?

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{UFlt}(X)$ l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Exercice 4. Pour un ensemble X, un $S \subseteq \mathrm{UFlt}(X)$ est appelé *fermé* ssi $S = \varnothing$ ou

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \qquad \text{implique} \qquad \mathcal{U} \in S \qquad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U} \text{ sur } X.$$

En prenant comme ouverts les compléments des fermés, montrer que ça définit une topologie sur $\mathrm{UFlt}(X)$ (que l'on appelle la *topologie de Zariski*).

TOPOLOGIE - SÉRIE 3

Exercice 1. Considérer $X := \mathbb{R} \amalg \{*\}$ la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et d'un singleton $\{*\}$. Poser

$$\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{X \setminus M \mid M \subseteq \mathbb{R} \text{ fini}\}\,.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie.

(b) Montrer que pour tout espace topologique Y et tout $y \in Y$ l'ensemble

$$\mathcal{V}(y) := \{N \subseteq Y \mid \text{il existe } V \subseteq Y \text{ ouvert tel que } y \in V \subseteq N\}$$

des voisinages de y forme un filtre.

(c) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ engendrée par $\mathcal{B}$ n'est pas *métrisable*, i.e. il n'y a aucune métrique d sur X telle que $\mathcal{T}_\mathcal{B} = \mathcal{T}_d$.
Indication: Dans un espace métrisable Y tous les $\mathcal{V}(y)$ ont une base de filtre dénombrable.

Exercice 2. Montrer que d et d' ci-dessous définissent des métriques sur l'ensemble $C[0,1]$ des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$:

$$d\colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_0^1 |fx - gx|\,\mathrm{d}x,$$

$$d'\colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |fx - gx|\,.$$

De plus, montrer que la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est strictement moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d'}$ induite par d' (i.e. $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_{d'}$).
Indication: Pour l'inégalité, construire une suite de fonctions qui converge par rapport à d mais ne converge pas par rapport à d'.

Exercice 3. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_1$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_2$ = la topologie de $\mathbb{R}_K$, dont une base est donnée par les intervalles ouverts ordinaires et les $]a,b[\setminus K$ où a, $b \in \mathbb{R}$ et $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;
- $\mathcal{T}_3$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_4$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a,b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_5$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base.

Pour chacune, déterminer lesquelles des autres topologies elle contient.

Exercice 4. Pour un ensemble X, montrer que les

$$M^\uparrow = {\uparrow}\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$. De même, pour un ensemble partiellement ordonné P, montrer que les

$${\uparrow}p := \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P.

TOPOLOGIE - SÉRIE 4

Exercice 1. Pour un espace métrique (X,d), $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que la boule fermée

$$\bar{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

est vraiment fermée dans X et montrer qu'elle inclut l'adhérence de la boule ouverte

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}\,.$$

Donner un exemple où cette inclusion $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x,\varepsilon)$ est stricte.

Exercice 2. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subset$" ou "$\supset$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

(a) si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \bar{N}$;

(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \bar{N}$;

(c) $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$;

(d) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \bar{N}$;

(e) $\bigcap_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} M_i}$;

(f) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \setminus \bar{B}$.

Exercice 3. Considérons $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit X un ensemble totalement ordonné et définissons la *topologie d'ordre* sur X, ayant tous les

$$]x,\infty[:= \{y \in X \mid x < y\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty,x[:= \{y \in X \mid y < x\}$$

(avec $x \in X$) comme sous-base. Montrer que

(a) les intervalles de la forme $]x,y[:= \{z \in X \mid x < z < y\}$ sont ouverts et les intervalles de la forme $[x,y] := \{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ sont fermés;

(b) Si X possède un élément minimal m, les intervalles de la forme $[m,x[$ sont ouverts et da la même façon, si X possède un élément maximal M, les intervalles de la forme $]x,M]$ sont ouverts.

Soit maintenant $X := I^2 = [0,1] \times [0,1]$, muni de la topologie d'ordre lexicographique. Déterminer les adhérences des sous-ensembles suivants de I^2:

$A = \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$B = \{(1 - 1/n, 1/2) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$C =]0,1[\times \{0\}$,

$D =]0,1[\times \{1/2\}$,

$E = \{1/2\} \times]0,1[$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 5

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit T_1 ssi tous les singletons $\{x\} \subseteq X$ sont fermés.

Exercice 1. Montrer qu'un espace fini et T_1 est discret et que tout espace de Hausdorff est T_1.

Exercice 2. Considérer les cinq topologies sur $\mathbb{R}$ de la semaine passée.

(a) Pour chacune des topologies, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

(b) Lesquelles de ces topologies satisfont-elles l'axiome de Hausdorff? Et l'axiome T_1?

Exercice 3. Pour un espace topologique métrisable $(X, \mathcal{T})$ et $M \subseteq X$ montrer que $x \in \overline{M}$ si et seulement si on y trouve une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x (dans X).
Indication: La direction "$\Leftarrow$" est juste dans un espace topologique quelconque (pas forcément métrisable).

Exercice 4. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

(a) tout point limite d'un filtre est aussi un point d'accumulation;

(b) pour un ultrafiltre, la réciproque est aussi juste;

(c) X est de Hausdorff si et seulement si tout filtre converge au plus vers un point;

(d) pour tout sous-ensemble $M \subseteq X$ et $x \in X$ on a $x \in \overline{M}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur M avec $\mathcal{F} \to x$ (dans X).

TOPOLOGIE - SÉRIE 6

Exercice 1. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Prouver que f est continue si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall x' \in X\colon d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d'\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y, \mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

(b) Pour $(Y, \mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D \subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Exercice 3. Soient Y un ensemble totalement ordonné (muni de la topologie d'ordre), $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ deux applications continues. Montrer que

(a) $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\} \subseteq X$ est fermé;

(b) l'application minimum $\min\colon (Y \times Y, \mathcal{T}_< * \mathcal{T}_<) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ est continue.
Indication: Lemme de Recollement.

Définition. Pour une application d'ensembles $f\colon X \to Y$ et un filtre $\mathcal{F}$ sur X on définit *l'image directe* de $\mathcal{F}$ par f

$$f_*\mathcal{F} := \mathcal{F}_Y\,\{fA \mid A \in \mathcal{F}\} \overset{(*)}{=} \left\{B \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}B \in \mathcal{F}\right\}$$

comme le filtre engendré par les images directes des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une application quelconque.

(a) Montrer l'égalité $(*)$ ci-dessus et conclure que l'image directe $f_*\mathcal{F}$ d'un filtre propre $\mathcal{F}$ est de nouveau propre.
Indication: Les fA avec $A \in \mathcal{F}$ forment une base de filtre.

Maintenant suppose que X et Y sont de plus munis de topologies et $x \in X$. Montrer que

(b) si f est continue et x un point d'accumulation d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X alors fx est un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$;

(c) f est continue en x si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F} \to x$ implique $f_*\mathcal{F} \to fx$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 7

Exercice 1. Montrer que

(a) tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff;

(b) tout produit de deux espaces de Hausdorff est de Hausdorff;

(c) si $(Y, \mathcal{T}')$ est un espace de Hausdorff et $f\colon (X, \mathcal{T}) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est une injection continue alors $(X, \mathcal{T})$ est aussi de Hausdorff.

Exercice 2. Les mêmes énoncés que dans 1(a) et (b) mais avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff". Trouver un contrexemple pour l'énoncé 1(c) avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff".

Exercice 3. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et les $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{T}_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

On se souvient qu'une application $(f_1, f_2)\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y \times Z, \mathcal{T}_Y * \mathcal{T}_Z)$ est continue si et seulement si $f_1\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ et $f_2\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ sont continues. En reversant la situation, on se demande si un résultat analogue est juste pour une application $X \times Y \to Z$.

Exercice 4. Considérons $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $I := [0,1]$ comme sous-espaces de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement (munis des topologies standards) et définissons

$$f\colon (S^1 \times I, \mathcal{T}_{S^1} * \mathcal{T}_I) \to (S^1, \mathcal{T}_{S^1}),\ (e^{i2\pi\varphi}, t) \mapsto e^{i2\pi\varphi^t}$$

où $\varphi \in\ ]0,1]$ (et donc φ^t est bien-défini pour tout $t \in I$).

(a) Montrer que f est continue en chaque variable. Plus spécifiquement, ça veut dire que pour tout $z \in S^1$ et $t \in I$, les applications

$$f(z,-)\colon \begin{array}{ccc} (I, \mathcal{T}_I) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ s & \mapsto & f(z,s) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f(-,t)\colon \begin{array}{ccc} (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ w & \mapsto & f(w,t) \end{array}$$

sont continues.

(b) L'application f, est-elle continue?

TOPOLOGIE - SÉRIE 8

Exercice 1. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que

(a) si les X_i sont de Hausdorff, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est aussi de Hausdorff;

(b) $\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$;

(c) $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$.

Exercice 2. Pour une famille dénombrable $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques métrisables, montrer que leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est de nouveau métrisable. Trouver un exemple de famille indénombrable, dont le produit n'est plus métrisable.
Indication: Considérer les bases locales d'un point où on appelle base locale d'un point x une base pour le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x.

Exercice 3.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite (et où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard) n'est pas métrisable.
Indication: De nouveau, considérer les bases locales.

(b) Trouver un exemple d'une famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques et d'une application $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{box}})$ tels que chaque composante $f_i\colon (Y,\mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ est continue mais f ne l'est pas.

Exercice 4.

(a) Pour une application $f\colon X \to Y$ et un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur X, montrer que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur Y.

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques dont le produit $X := \prod_{i\in I} X_i$ est non-vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur $(X, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ et notons $\mathcal{F}_i := (\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{F}$ les images directes de $\mathcal{F}$ par les projections $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$. Pour chaque point $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, montrer que

(b) pour $f\colon Y \twoheadrightarrow Z$ une application surjective et $\mathcal{G}$ un filtre sur Y

$$f_*\mathcal{G} = \{fA \mid A \in \mathcal{G}\}$$

(en particulier $\mathcal{F}_i = \{\mathrm{pr}_i A \mid A \in \mathcal{F}\}$);

(c) $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si chaque $\mathcal{F}_i$ avec $i \in I$ converge vers x_i.

(d) Trouver un exemple concret de X et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de point d'accumulation mais où chaque $(\mathrm{pr}_i\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $i \in I$ en possède un.

TOPOLOGIE - SÉRIE 9

Exercice 1. Soit (Y, d) un espace métrique et X un ensemble. Montrer qu'une famille d'applications $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $f : X \to Y$ si et seulement si elle converge vers f dans $\left(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar{\rho}}\right)$ où $\bar{\rho}$ est la métrique uniforme.

Exercice 2. Trouver deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ et une application non continue $f : X \to Y$ tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergente vers un $x \in X$, la suite $(fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fx.

Exercice 3. Montrer que

(a) "être de Hausdorff" et "être métrisable" sont des propriétés topologiques;

(b) une application $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, bijective et fermée (i.e. l'image d'un fermé par f est fermé);

(c) si $\left(f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X'_i, \mathcal{T}'_i)\right)_{i\in I}$ est une famille d'homéomorphismes alors

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathop{\ast}_{i\in I} \mathcal{T}_i\right) \cong \left(\prod_{i\in I} X'_i, \mathop{\ast}_{i\in I} \mathcal{T}'_i\right).$$

Exercice 4. Considérons les groupes

$$\mathrm{SO}_n := \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \;\middle|\; AA^t = E \text{ et } \det A = 1\right\}$$

$$\mathrm{SU}_n := \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} \;\middle|\; AA^* = E \text{ et } \det A = 1\right\}$$

comme sous espaces de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ et $(\mathbb{C}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un *groupe topologique*, ce qui veut dire que la multiplication des matrices et prendre l'inverse sont des applications continues

$$\mu : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \iota : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En conclure que SO_n et SU_n sont aussi des groupes topologiques (en fait des sous groupes topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

(c) Montrer que $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ comme groupes topologiques, ce qui veut dire qu'il existe un isomorphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ qui est aussi un homéomorphisme.

(d) Montrer que SU_2 est homéomorphe à S^3.

TOPOLOGIE - SÉRIE 10

Exercice 1. Soit X un ensemble totalement ordonné. Montrer que si une application non décroissante $f\colon (X, \mathcal{T}_<) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ a la propriété de la valeur intermédiaire (i.e. si x, $x' \in X$ et $y \in Y$ avec $f(x) \leqslant y \leqslant f(x')$ il existe $x'' \in X$ tel que $f(x'') = y$), elle est continue.

Exercice 2.

(a) Démontrer que pour toute application continue $f\colon \big(S^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{S^1}\big) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$, il existe $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

(b) Soit $f\colon \big([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]}\big) \to \big([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]}\big)$ une application continue.

- Considérer l'application graphe $F\colon \big([0,1], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[0,1]}\big) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$, $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$. Que peut-on dire sur sa continuité?
- Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer la connexité de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport aux plusieurs topologies différentes.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ est connexe par rapport à la topologie produit.
Indication: $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\omega$.

(b) Déterminer si $\mathbb{R}^\omega$ est connexe dans la topologie uniforme ou pas.
Indication: Considérer $\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x \text{ bornée}\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.

(c) Et par rapport à la topologie boîte?

Exercice 4. (Courbe sinus du topologue) Montrer que la courbe sinus du topologue

$$T := \Big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in]0,1]\Big\} \cup \{(0,0)\}$$

aussi bien que la courbe sinus fermée du topologue

$$\overline{T} := \Big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in]0,1]\Big\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

est un sous-espace connexe de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Exercice 1. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})_{i \in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs de X tels que pour tout i, $j \in I$ il y a $k \in I$ avec $Y_i \cap Y_k$, $Y_j \cap Y_k \neq \varnothing$ (e.g. si $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \varnothing$) alors $\bigcup_{i \in I} Y_i$ est connexe par arcs;

(b) si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\big(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\big)$ est connexe par arcs;

(c) si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques connexes par arcs, alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, \ast_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Les espaces suivants, sont-ils connexes par arcs?

(a) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

(b) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

(c) $(I^2, \mathcal{T}_<)$ où $<$ est l'ordre lexicographique sur $I^2 = [0, 1]^2$
Indication: Pour un chemin dans I^2, considérer les préimages des segments verticaux $\{x\} \times \,]0, 1[$ et utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, ainsi que le fait que $\mathbb{Q} \cap I$ est dénombrable.

Exercice 3. Montrer que SO_n (avec la topologie sous-espace de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$) est connexe par arcs.
Indication: Chaque matrice dans SO_n est conjugée à une matrice par blocs diagonales où chaque bloc est de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [1].$$

Exercice 4. Montrer que

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ (où $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}}$ est la topologie cofinie) est connexe;

(b) si X est un ensemble avec $|X| \geqslant 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, alors $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est connexe par arcs.
Indication: Considérer d'abord le cas $X = \mathbb{R}$ et pour le cas général, utiliser qu'un sous-espace de $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est aussi muni de la topologie cofinie.

TOPOLOGIE - SÉRIE 12

Dans la géométrie différentielle on parle souvent des “variétés connexes” même si on veut vraiment dire “variétés connexes par arcs”. L’exercice suivant est une justification pour ça.

Exercice 1. Montrer qu’un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s’il est connexe par arcs.
Indication: Utiliser la caractérisation du cours et conclure que les composantes connexes par arcs sont ouvertes.

Exercice 2. Dans cet exercice tous les espaces de matrices sont considérés comme sous-espaces de $\mathbb{C}^{n^2}$ muni de la topologie standard. Déterminer les composantes connexes par arcs de

(a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
(c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$
(d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
(e) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Indication: Pour (a) et (c), se convaincre que pour chaque $A \in \mathrm{GL}_n$, ils existent des matrices élémentaires $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l$ de la forme $E+\lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ telles que $P_1 \ldots P_k A Q_1 \ldots Q_l$ est une matrice diagonale. Après réduire au cas SO_n et utiliser l’exercice 4 de la semaine passée. Pour (b) et (d), réduire à (a) et (c).

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à des topologies différentes.

(a) Déterminer les composantes connexes par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, *_{n\in\omega} \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.
(b) Montrer que deux suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$ si et seulement si $x - y = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$.
(c) Démontrer que deux suites x, y sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ si et seulement si $x - y$ est nulle presque partout (i.e. ssi $x - y \in \mathbb{R}^\infty$).
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$. De plus, si $x \notin \mathbb{R}^\infty$ il existe un homéomorphisme $f\colon (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}}) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ tel que $f(0) = 0$ et $f(x)$ n’est pas bornée.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

$$\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ est un point d’accumulation de } \mathcal{F}\}.$$

TOPOLOGIE - SÉRIE 13

Exercice 1. Montrer que pour un espace compact $(X, \mathcal{T})$, toute projection

$$\mathrm{pr}_2 \colon (X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$$

avec $(Y, \mathcal{T}')$ un espace quelconque est fermée (i.e. l'image d'un fermé par pr_2 reste fermé).

Remarque. Une application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est appelée *propre* si et seulement si pour tout espace $(Z, \mathcal{T}'')$, l'application produit $f \times \mathrm{id}_Z \colon (X \times Z, \mathcal{T} * \mathcal{T}'') \to (Y \times Z, \mathcal{T}' * \mathcal{T}'')$ est fermé. Alors l'exercice dit que pour $(X, \mathcal{T})$ compact, l'application unique $X \to *$ est propre.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (vu comme sous-espaces de $\mathbb{R}^{n^2}$ avec la topologie standard) sont compacts.
Indication: Une matrice est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale.*

Exercice 3. (Compactifié d'Alexandrov) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X + \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ ouvert si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;
(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé;
(c) si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact;
(d) chaque application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé *propre*) induit une application continue $\dot{f} \colon \dot{X} \to \dot{Y}$ avec $\dot{f}|_X = f$ et $\dot{f}(\infty) = \infty$;
(e) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact de Hausdorff, $x \in X$ et $X' := X \setminus \{x\}$, alors $\dot{X}'$ est homéomorphe à $(X, \mathcal{T})$;
(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.
Indication: Projection stéréographique.

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{PFlt}(X)$ l'ensembles des filtres propres sur X, partiellement ordonné par inclusion.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X, prouver que les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $\mathcal{F}$ est un élément maximal dans $\mathrm{PFlt}(X)$.
(b) Pour tout $A \subseteq X$, soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
(c) $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

En utilisant le lemme de Zorn, déduire que l'on peut étendre tout filtre en un ultrafiltre.

TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Pour une chaîne $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \ldots$ de plongements, sa *colimite* est l'espace topologique X dont son ensemble sous-jacent est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si tout $U \cap X_n \subseteq X_n$ est ouvert. Montrer que

(a) ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$;

(b) $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé;

(c) si chaque $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ est un plongement fermé/ouvert alors chaque inclusion $i_n \colon X_n \hookrightarrow X$ est un plongement fermé/ouvert;

(d) si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute application continue $f \colon K \to X$ factorise par un i_n.
Indication: Trouver $Y = \{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq f(K)$ avec $x_n \notin X_n$ (pas forcément deux à deux distinct) et montrer que chaque $A \subseteq Y$ est fermé dans X.

Exercice 2. **(Heine-Borel)** Montrer pour $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que $\big(K, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_K\big)$ est compact si et seulement si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et borné.
Indication: Utiliser qu'un intervalle fermé ainsi qu'un produit fini de compacts est compact.

Exercice 3. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, les énoncés suivants sont équivalents:

(a) $(X, \mathcal{T})$ est compact;

(b) tout filtre sur X a un point d'accumulation;

(c) tout ultrafiltre sur X converge.

Indication: Utiliser la PIF.

Exercice 4. Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si l'application unique vers un point $X \to *$ est propre (cf. série 13, exercice 1).
Indication: On a, pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, un espace topologique $Y := X + \{*\}$ dont les ouverts non-vides sont les $F + \{*\}$ avec $F \in \mathcal{F}$. Après, considérer la projection de l'adhérence de la "diagonale" $D := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 15

Exercice 1. Pour un espace métrique X, un point $x \in X$ et $\varnothing \neq M \subseteq X$, on définit

$$d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y), \qquad \text{la } \textit{distance} \text{ entre } x \text{ et } M.$$

Montrer que

(a) pour $\varnothing \neq M \subseteq X$ fixé, la fonction $d(-, M)\colon X \to \mathbb{R}$ est continue;

(b) $\overline{M} = \{x \in X \mid d(x, M) = 0\}$ pour tout $\varnothing \neq M \subseteq X$.

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 2. En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i \in I}$ est non-vide (a.k.a. l'axiome du choix).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i \in I}$.

Exercice 3. (Théorème d'Alexandre) Soit $\mathcal{S}$ une sous-base pour la topologie d'un espace X. Si chaque recouvrement de X par ouverts de $\mathcal{S}$ admèt un sous-recouvrement fini, X est compact.
Indication: Preuve par absurde. Supposer qu'il y a un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X sans point-limite.

Définition. Un ensemble totalement ordonné est *bien ordonné* ssi tout sous-ensemble non-vide a un minimum. On note qu'un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est aussi bien ordonné.

Théorème. Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Définition. On définit un ensemble bien ordonné Ω comme suit: Soit X un ensemble bien ordonné indénombrable (e.g. $\mathbb{R}$ muni d'un bon ordre arbitraire). Si chaque $\downarrow x := \{y \in X \mid y < x\}$ avec $x \in X$ est dénombrable, alors $\Omega := X$ et sinon, on trouve le plus petit $x \in X$ avec $\downarrow x$ indénombrable et on pose $\Omega := \downarrow x$.

Exercice 4. Montrer que

(a) $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact mais pas séquentiellement compact.

(b) Ω muni de la topologie d'ordre est séquentiellement compact mais pas compact.
Indication: Chaque suite dans Ω est bornée.

TOPOLOGIE - SÉRIE 16

Exercice 1. Montrer que chaque espace métrique compact est séquentiellement compact.

Définition. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un espace X, son filtre associé est le filtre engendré par tout les $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour un espace topologique X, montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X avec un point d'accumulation $x \in X$, alors on peut étendre $\mathcal{F}$ en un ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui converge vers x.
Indication: Considérer $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{F}$.

(b) un point $x \in X$ est un point d'accumulation/point limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il l'est pour le filtre associé.

(c) si x est un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant le filtre associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergent vers x.

Définition. Un espace X est *paracompact* ssi tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X admet un raffinement ouvert localement fini où un recouvrement (ouvert) $\mathcal{V}$ est appelé

- un *raffinement (ouvert)* de $\mathcal{U}$ ssi chaque $V \in \mathcal{V}$ est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$;
- *localement fini* ssi tout $x \in X$ a un voisinage qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

Exercice 3. Montrer qu'un produit d'un espace paracompact et d'un espace compact est de nouveau paracompact. Similairement, si un produit $X \times Y$ est paracompact et $Y \neq \varnothing$ est T_1, alors X est paracompact.

Exercice 4. **(Théorème de A. H. Stone)** Montrer qu'un espace métrisable est paracompact.

Indication: Par le théorème de la série précédente, on peut toujours indicer un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ *par un ensemble bien ordonné* I. *Alors, pour chaque* $x \in X$ *il y a* $m(x) \in I$ *minimal avec* $x \in U_{m(x)}$. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *on définit des ouverts* $\{V_i^n\}_{i\in I}$ *comme suit: Chaque* V_i^n *est la réunion des* $B(x, 2^{-n})$ *tels que*

(a) $i = m(x)$*;* *(b)* $x \notin V_j^m$ *pour tous* $m < n$, $j \in I$*;* *(c)* $B(x, 3\cdot 2^{-n}) \subseteq U_i$.

Maintenant, il faut montrer que $\{V_i^n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0},\, i\in I}$ *est un raffinement ouvert de* $\mathcal{U}$ *qui est localement fini. Pour la vérification du dernier point, on prend pour chaque* $x \in X$ *le* $i \in I$ *minimal tel que* $x \in V_i^n$ *pour un* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *(que l'on fixe aussi). En choisissant* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *avec* $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$*, on montre que la boule* $B(x, 2^{-(n+k)})$ *intersecte seulement un nombre fini de* V_j^m *en montrant que*

(1) pour $m \geqslant n+k$*, elle ne l'intersecte pas;*

(2) pour $m < n+k$*, elle l'intersecte pour au plus un* $j \in I$*.*

TOPOLOGIE - SÉRIE 17

Exercice 1. Montrer que

(a) $\mathbb{R}_K$ n'est pas régulier;

(b) $\mathbb{R}_l$ est normal;

(c) $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ est régulier.

Exercice 2. Soit X un espace topologique.

(a) Si X est de Hausdorff, on sait qu'un sous-espace compact $A \subseteq X$ est forcément fermé. Est-ce que c'est aussi vrai pour A paracompact?

(b) Si X est paracompact et $A \subseteq X$ fermé, alors A est paracompact aussi.

(c) **(Dieudonné)** Un espace paracompact et de Hausdorff est normal.
Indication: D'abord montrer la régularité.

Définition. Une application continue $f\colon X \to Y$ est appelée *propre* ssi pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$, $(x, z) \mapsto (fx, z)$ est fermée. Si de plus, f est surjective, on dit que f est un *quotient propre* ou *parfaite*.

Exercice 3. Pour une application continue $f\colon X \to Y$, montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

(a) f est propre;

(b) f est fermée et ses fibres $f^{-1}y$ avec $y \in Y$ sont compactes;

(c) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X et $y \in Y$ un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$, alors il existe un point d'accumulation $x \in X$ de $\mathcal{F}$ tel que $fx = y$;

(d) si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X et $y \in Y$ un point limite de $f_*\mathcal{U}$, alors il existe un point limite $x \in X$ de $\mathcal{U}$ tel que $fx = y$.

Indication: Pour "(a) $\Rightarrow$ (b)", montrer que chaque $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est propre et utiliser l'exercice 4 de la série 14. Pour "(d) $\Rightarrow$ (a)", montrer que si on a une famille d'applications continues $(f_i)_{i \in I}$ dont chacune vérifie (d), alors le produit $\prod_{i \in I} f_i$ vérifie (d) aussi. Ensuite, il suffit de montrer qu'une application qui vérifie (d) est fermée.

Exercice 4. Soit $p\colon X \to Y$ un quotient propre. Montrer que

(a) si X est de Hausdorff/régulier, alors Y l'est aussi;
Indication: Si $g\colon X \to Y$ est continue et fermée, $M \subseteq Y$ et $U \subseteq X$ un voisinage ouvert de $g^{-1}M$, alors il existe un voisinage ouvert V de M avec $g^{-1}V \subseteq U$.

(b) si Y est compact, alors X l'est aussi.

TOPOLOGIE - SÉRIE 18

Définition. Un sous-ensemble d'un espace topologique est G_δ ssi on peut l'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 1. Dans un espace normal X, montrer qu'un fermé $A \subseteq X$ est G_δ si et seulement s'il existe $f\colon X \to I$ continue tel que $fA \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$. Conclure que pour deux fermés A, $B \subseteq X$ disjoints qui sont G_δ, il existe $f\colon X \to I$ tel que $A = f^{-1}\{0\}$ et $B = f^{-1}\{1\}$.
Indication: Pour l'implication "$\Rightarrow$", écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (où chaque U_n est ouvert) et choisir des applications d'Urysohn f_n pour A et $X \setminus U_n$.

Exercice 2. (Compactifié de Stone-Čech) Pour un espace topologique X, on note $C(X, I)$ l'ensemble des applications continues $X \to I$ et on considère

$$h_X\colon X \to I^{C(X,I)},\ x \mapsto (fx)_{f\in C(X,I)}.$$

Le *compactifié de Stone-Čech* de X est $\beta X := \overline{h_X X}$, ce qui est compact par le théorème de Tychonoff. En notant $\eta_X\colon X \to \beta X$ l'application induite par h_X, montrer que

(a) X est complètement régulier ssi η_X (ou h_X) est un plongement;
Indication: Un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.

(b) pour $f\colon X \to Y$ continue, il existe une unique application continue $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ telle que $\beta f \circ \eta_X = \eta_X \circ f$;
Indication: Pour l'unicité, il faut se souvenir que βY est de Hausdorff et que deux applications continues vers un espace de Hausdorff coïncident, s'ils coïncident sur un sous-ensemble dense.

(c) si X est compact de Hausdorff, alors η_X est un isomorphisme;

(d) si K est compact de Hausdorff et $f\colon X \to K$ continue, il existe une unique application continue $f^\flat\colon \beta X \to K$ telle que $f^\flat \circ \eta_X = f$.

Définition. Le *support* d'une application $f\colon X \to \mathbb{R}$ (où X est un espace topologique) est

$$\operatorname{supp} f := \overline{f^{-1}\mathbb{R}^\times} = \overline{\{x \in X \mid fx \neq 0\}}.$$

Une *partition d'unité* sur X est une famille d'applications $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$, telle que $(\operatorname{supp}\varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini (i.e. tout $x \in X$ admet un voisinage U tel que $\{j \in J \mid U \cap \operatorname{supp}\varphi_j \neq \varnothing\}$ est fini) et $\sum_{j\in J} \varphi_j x = 1$ pour tous $x \in X$ (cette somme est finie par la première condition). Si, pour une telle partition d'unité, $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de X on dit que $(\varphi_j)_{j\in J}$ est *subordonnée* à $(U_j)_{j\in J}$ ssi $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Finalement, si pour un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ il existe une partition d'unité subordonnée à $(U_j)_{j\in J}$ on dit qu'il est *numérable*.

Exercice 3. Soit X un espace paracompact de Hausdorff. Montrer que

(a) si $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j\in J}$ tel que $\overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$;

(b) un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ est numérable s'il existe une famille $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$ d'applications continues, telle que $(\operatorname{supp}\varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini, $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j\in J} \varphi_j\colon X \to \mathbb{R}$ est strictement positive;

(c) chaque recouvrement ouvert de X est numérable.
Indication: Utiliser (a) pour trouver deux recouvrements ouverts localement finis $(V_j)_{j\in J}$, $(W_j)_{j\in J}$ tels que $\overline{W}_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et utiliser le lemme d'Urysohn.

TOPOLOGIE - SÉRIE 19

Exercice 1. Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que si un espace compact de Hausdorff X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.

(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.

(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Définition. Un espace topologique X est *localement compact* ssi pour chaque point $x \in X$ et chaque voisinage ouvert U de x, il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $x \in \mathring{K} \subseteq K \subseteq U$. C'est à dire, les voisinages compacts engendre le filtre $\mathcal{N}(x)$.

Exercice 3. Montrer qu'un espace localement compact de Hausdorff est

(a) régulier.

(b) complètement régulier.
Indication: Utiliser le lemme de recollement.

Exercice 4. Pour un espace compact de Hausdorff X on dénote $C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$, qui possède naturellement la structure d'un anneau en sommant et multipliant les fonctions valeur par valeur:

$$(f + g)x := fx + gx, \qquad (fg)x := (fx)(gx)$$

pour f, $g \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$. Soit $X' := \operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $C(X, \mathbb{R})$ et pour $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$U_f := \{x \in X \mid fx \neq 0\}, \qquad U'_f := \{\mathfrak{m} \in X' \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

On va montrer que l'on peut reconstruire X de $C(X, \mathbb{R})$ en montrant que

(a) les U_f forment une base pour la topologie de X et les U'_f forment une base de topologie sur X' (et on regarde X' comme un espace topologique muni de cette topologie);

(b) l'application

$$\varphi \colon X \to X',\ x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid fx = 0\}$$

est bien-défini (i.e. $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal) et continue;
Indication: Considérer $\mathrm{ev}_x \colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(c) l'application φ est bijectif.
Indication: Pour la surjectivité, montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$

$$V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} \neq \varnothing.$$

(d) l'application φ est ouverte.

TOPOLOGIE - SÉRIE 20

Exercice 1. Vrai ou faux? Un quotient d'un espace T_1 est T_1. Un quotient d'un espace compact est compact.

Exercice 2. La *suspension* d'un espace $X \neq \varnothing$ est $\Sigma X := (X \times I)/\!\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence, engendrée par $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour x, $y \in X$ (faire un dessin!). Démontrer que $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. **(Espace projectif)** L'espace projectif réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\!\sim \qquad \text{où} \qquad x \sim y \ \Leftrightarrow\ \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Ça veut dire $\mathbb{RP}^n$ est l'espace des droites par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

(a) Chaque $\mathbb{RP}^n$ est compact de Hausdorff et $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

(b) Il y a un recouvrement ouvert $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ de $\mathbb{RP}^n$ où tout U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. *Indication: U_i est l'image de $V_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1\}$ dans $\mathbb{RP}^n$.*

(c) Les compléments des U_i sont homéomorphes à $\mathbb{RP}^{n-1}$.

(d) $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} \cong S^n$ où $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{RP}^n \setminus U_i \subseteq \mathbb{RP}^n$ pour un $i \in 1, \ldots, n+1$.

Exercice 4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$ fermé. Pour toute application continue $f\colon A \to Y$, on définit

$$X \amalg_f Y := (X \amalg Y)/\!\sim \qquad \text{où } \sim \text{ est engendrée par } a \sim f(a)\ \forall a \in A.$$

On dit alors que X a été *attaché* à Y via f, qui est *l'application d'attachement*. En écrivant $q\colon X \amalg Y \to X \amalg_f Y$ pour l'application quotient, montrer que

(a) la restriction $q|_Y\colon Y \to X \amalg_f Y$ est un plongement fermé;

(b) la restriction $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to X \amalg_f Y$ est un plongement ouvert;

(c) $(X \amalg_f Y)/Y \cong X/A$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 21

Exercice 1. Les espaces métriques suivants, sont-ils complets?

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $]0,1[$ (c) Un ensemble X avec la métrique discrète

Exercice 2. Soit X un espace métrique tel qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que tout les $\overline{B(x,\varepsilon)}$ avec $x \in X$ sont compacts. Montrer qu'alors X est complet.

Exercice 3. (Théorème de Baire) Si X est un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles $U_n \subseteq X$ ouverts et denses, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$ est dense aussi.
Indication: Montrer que chaque $U \subseteq X$ ouvert et non-vide intersecte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une surjection continue.

(a) Si X est compact, métrisable et Y est de Hausdorff, alors Y est métrisable.
Indication: Construire une base dénombrable.

(b) Si X est localement connexe (i.e. pour tout point, chaque voisinage contient un voisinage connexe) et f est une application quotient, alors Y est localement connexe.
Indication: X est localement connexe ssi tout ses sous-espaces ouverts ont des composantes connexes ouvertes. De plus, la préimage d'une composante connexe par une application continue est une réunion de composantes connexes.

(c) Conclure que chaque quotient de Hausdorff de I est compact, connexe, localement connexe et possède une base dénombrable.
Indication: Une application continue, surjective et fermée est un quotient.

Remarque. La réciproque de (c) est vraie aussi et connu comme le *théorème de Hahn-Mazurkiewicz*.

TOPOLOGIE - SÉRIE 22

Exercice 1. Soit $X \neq \varnothing$ un espace métrique complet et $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \to \mathbb{R}$ (i.e. les applications $X \to \mathbb{R}$ dont l'image est bornée) que l'on muni de la norme $\|f\| := \sup_{x \in X} |fx|$. En fixant un point $x_0 \in X$, montrer que $X \to B(X, \mathbb{R})$, $x \mapsto \varphi_x$ avec $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$ est un plongement isométrique.

Définition. Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ et l'inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sont continus.

Exercice 2. Prouver que les suivants sont des groupes topologiques:

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. Soit G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Montrer que

(a) $\overline{H} \subseteq G$ est aussi un sous-groupe;

(b) le quotient $G \twoheadrightarrow G/H$ est ouvert;

(c) si H est normal, $\overline{H}$ l'est aussi;

(d) si H est normal, G/H muni de la topologie quotient et de la multiplication induite de G est aussi un groupe topologique.

Exercice 4. Un *isomorphisme de groupes topologiques* entre deux groupes topologiques G, H est un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ qui est aussi un homéomorphisme.

(a) Soient G, H deux groupes topologiques et $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un morphisme de groupes qui est aussi continu, ouvert et surjectif. Alors, f factorise par le quotient $G/\operatorname{Ker} f$ et l'application induite $G/\operatorname{Ker} f \to H$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

(b) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ comme groupes topologiques.

TOPOLOGIE - SÉRIE 23

Pour cette série, on fixe deux espaces topologiques X, Y et on va considérer les topologies suivantes sur l'ensemble Y^X d'applications (pas forcément continues) $X \to Y$:

- $\mathcal{T}_{\mathrm{po}}$ - la topologie point-ouvert (i.e. la topologie produit);
- $\mathcal{T}_{\mathrm{cc}}$ - la topologie de convergence compacte pour Y métrique;
- $\mathcal{T}_{\mathrm{unif}}$ - la topologie uniforme pour Y métrique.

Exercice 1. Rappelons que l'on a toujours $\mathcal{T}_{\mathrm{po}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{cc}}$ et aussi $\mathcal{T}_{\mathrm{cc}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{unif}}$ pour Y métrique. Dans certains cas, ces inclusions deviennent des égalités. Montrer que

(a) si X est discret, alors $\mathcal{T}_{\mathrm{po}} = \mathcal{T}_{\mathrm{cc}}$;

(b) si X est compact, alors $\mathcal{T}_{\mathrm{cc}} = \mathcal{T}_{\mathrm{unif}}$.

Exercice 2. Si Y est un espace métrique complet, montrer que Y^X avec la topologie uniforme l'est aussi.

Exercice 3. Montrer que

(a) $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\mathrm{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\mathrm{cc}}$;

(b) $C(I, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^I$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\mathrm{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\mathrm{po}}$.

Exercice 4. (Théorème d'Approximation de Weierstrass) Dans cet exercice, on va analyser l'adhérence de l'ensemble $P(I, \mathbb{R})$ des applications polynomiaux sur I dans $C(I, \mathbb{R})$ par rapport à $\mathcal{T}_{\mathrm{unif}} = \mathcal{T}_{\mathrm{cc}}$. Alors, soit $f \in C(I, \mathbb{R})$ avec $f0 = f1 = 0$, que l'on va considérer comme une fonction sur $\mathbb{R}$ avec $f|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$ (et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$). De plus, posons

$$Q_n(x) := c_n(1 - x^2)^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ et } c_n \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tel que} \qquad \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Observer que les Q_n sont des fonctions paires (i.e. $Q_n(-x) = Q_n(x)$) et positives. Montrer que

(a) $c_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (*Indication: Intégrer jusqu'à* $1/\sqrt{n}$ *et utiliser l'inégalité de Bernoulli*);

(b) $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

En définissant $P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, montrer que

(c) $P_n(x)$ est polynomiale en x (*Indication: Changement de variable* $s := x + t$);

(d) $P_n \to f$ uniformément sur I (*Indication: Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *il y a* $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *tel que* $|y - x| < \delta \Rightarrow |fy - fx| < \varepsilon/2$ *et que l'on utilise pour subdiviser l'intégrale* $P_n(x) - f(x)$ *en trois parties* $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ *et* $[\delta, 1]$);

(e) Généraliser au cas où $f0$ et $f1$ sont arbitraires.

(f) En conclure que $\overline{P(I, \mathbb{R})} = C(I, \mathbb{R})$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 24

Exercice 1. Pour un espace topologique X et un espace métrique Y, montrer que la topologie de convergence compacte et la topologie compact ouvert sur $C(X, Y)$ sont les mêmes.

Exercice 2. Soient X, Y des espaces topologiques.

(a) Si $A \subseteq X$ est fermé, alors $C(Y, A) \subseteq C_{\mathrm{co}}(Y, X)$ est fermé aussi.

(b) Pour X de Hausdorff et $Y \neq \varnothing$, l'inclusion par applications constantes

$$\mathrm{const}\colon X \to C_{\mathrm{co}}(Y, X)$$

est un plongement fermé.

Exercice 3. Pour deux espaces topologiques X, Y, si $C(X, Y)$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que l'évaluation

$$\mathrm{ev}\colon C(X, Y) \times X \to Y,\ (f, x) \mapsto fx$$

est continue, montrer que la topologie compact ouvert est plus grossière que $\mathcal{T}$.

Exercice 4.

(a) Soient X, Y, Z trois ensembles. Comprendre "l'adjonction exponentielle" (i.e. montrer que c'est une bijection bien-définie)

$$Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X,\ f \mapsto f^\sharp,\ g^\flat \leftarrow\!\shortmid g \quad \text{où} \quad (f^\sharp x)y := f(x, y) \quad \text{et} \quad g^\flat(x, y) := (gx)y$$

pour $f\colon X \times Y \to Z$, $g\colon X \to Z^Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

(b) Soient X, Y, Z des espaces topologiques avec Y localement compact. Montrer que la composition

$$C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times C_{\mathrm{co}}(X, Y) \to C_{\mathrm{co}}(X, Z),\ (g, f) \mapsto g \circ f$$

est continue et conclure que l'évaluation $\mathrm{ev}\colon C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times Y \to Z$, $(g, y) \mapsto gy$ l'est aussi.

(c) Pour trois espaces topologiques X, Y, Z avec X et Y localement compact, montrer que l'adjonction exponentielle

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z))$$

du cours est en fait même un homéomorphisme

$$C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \cong C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z)).$$

TOPOLOGIE - SÉRIE 25

Exercice 1. Pour une famille d'espaces topologiques basés $(X_i, x_i)_{i\in I}$, montrer que

$$\pi_1\left(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\right) \cong \prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Exercice 2. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ un *rétract* (i.e. il existe $r\colon X \to A$ continue avec $r|_A = \mathrm{id}_A$, ce que l'on appelle une *rétraction*). Montrer que pour tout $x \in A$ les morphismes

$$\pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

Exercice 3. Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_c \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \simeq_c \gamma_1(\gamma_2\gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)}\gamma \simeq_c \gamma \simeq_c \gamma\varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma\bar{\gamma} \simeq_c \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}\gamma \simeq_c \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Exercice 4. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$, dont les deux possèdent une unité (i.e. ils existent e, $f \in X$ avec $e \cdot x = x \cdot e = x$ et $f * x = x * f = x$ pour tout $x \in X$) et qui vérifient la *loi d'échange*

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a,\ b,\ c,\ d \in X.$$

Montrer que les deux unités aussi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

TOPOLOGIE - SÉRIE 26

Exercice 1. Pour un espace topologique basé (X, x), montrer que $\pi_1(X, x)$ est abélien si et seulement si pour tout point $y \in X$ et touts chemins γ, δ de x vers y, les isomorphismes induits

$$\hat{\gamma},\ \hat{\delta}\colon \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, y)$$

coïncident.

Exercice 2. (défi) Pour deux applications continues f, $g\colon X \to Y$ qui sont homotopes par une homotopie $H\colon f \simeq g$, montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, fx) \arrow[dd, "\widehat{H(x,-)}"] \\
\pi_1(X, x) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, gx)
\end{tikzcd}$$

commute pour tout point de base $x \in X$.

Exercice 3. Un espace topologique $X \neq \varnothing$ est appelé *contractile* ssi l'identité $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ est homotope à une application constante.

(a) Montrer qu'un espace contractile X est simplement connexe.

(b) Rappelons que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé une *partie étoilée par rapport à* $x \in S$ ssi pour tout $y \in S$ le segment $[x, y] := \{ty + (1-t)x \mid t \in I\}$ est inclus dans S. Montrer qu'une partie étoilée (par rapport à un point) est contractile.

Exercice 4.

(a) Pour deux revêtements $p\colon E \to B$, $p'\colon E' \to B'$, montrer que l'application produit $p \times p'\colon E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement aussi.

(b) Soit $p\colon E \to B$ un revêtement et $A \subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p\colon p^{-1}A \to A$ est un revêtement aussi.

TOPOLOGIE - SÉRIE 27

Exercice 1. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si B est discret, une application continue et surjective $p\colon E \to B$ est un revêtement si et seulement si E est discret.

(b) Quel sont les revêtements de B si B est muni de la topologie grossière?

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'application quotient $S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement.

Exercice 3. Montrer que

(a) si X est un espace topologique et U, $V \subseteq X$ deux ouverts simplement connexes tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V \neq \varnothing$ connexe par arcs, alors X est simplement connexe;
Indication: Si $\gamma\colon I \to X$ est un lacet, choisir un nombre de Lebesgue pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I.

(b) les sphères S^n sont simplement connexes pour $n > 1$.

Exercice 4. Montrer qu'un revêtement $p\colon E \to B$ est un quotient propre si et seulement s'il est fini (i.e. les fibres sont finis).
Indication: $p\colon E \to B$ est fermée ssi pour tout $x \in B$ et tout ouvert $U \subseteq E$ avec $p^{-1}x \subseteq U$ il existe $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$ (cf. l'indication pour l'exercice 4 de la série 17).