TOPOLOGIE - SÉRIE 27

Exercice 1. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si B est discret, une application continue et surjective $p\colon E \to B$ est un revêtement si et seulement si E est discret.

(b) Quel sont les revêtements de B si B est muni de la topologie grossière?

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'application quotient $S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement.

Exercice 3. Montrer que

(a) si X est un espace topologique et U, $V \subseteq X$ deux ouverts simplement connexes tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V \neq \varnothing$ connexe par arcs, alors X est simplement connexe;
Indication: Si $\gamma\colon I \to X$ est un lacet, choisir un nombre de Lebesgue pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I.

(b) les sphères S^n sont simplement connexes pour $n > 1$.

Exercice 4. Montrer qu'un revêtement $p\colon E \to B$ est un quotient propre si et seulement s'il est fini (i.e. les fibres sont finis).
Indication: $p\colon E \to B$ est fermée ssi pour tout $x \in B$ et tout ouvert $U \subseteq E$ avec $p^{-1}x \subseteq U$ il existe $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$ (cf. l'indication pour l'exercice 4 de la série 17).

Date: 20 mai 2014