TOPOLOGIE - SÉRIE 25

Exercice 1. Pour une famille d'espaces topologiques basés $(X_i, x_i)_{i\in I}$, montrer que

$$\pi_1\left(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\right) \cong \prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Exercice 2. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ un *rétract* (i.e. il existe $r\colon X \to A$ continue avec $r|_A = \mathrm{id}_A$, ce que l'on appelle une *rétraction*). Montrer que pour tout $x \in A$ les morphismes

$$\pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

Exercice 3. Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_c \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \simeq_c \gamma_1(\gamma_2\gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)}\gamma \simeq_c \gamma \simeq_c \gamma\varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma\bar{\gamma} \simeq_c \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}\gamma \simeq_c \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Exercice 4. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$, dont les deux possèdent une unité (i.e. ils existent e, $f \in X$ avec $e \cdot x = x \cdot e = x$ et $f * x = x * f = x$ pour tout $x \in X$) et qui vérifient la *loi d'échange*

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a,\ b,\ c,\ d \in X.$$

Montrer que les deux unités aussi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Date: 6 mai 2014