TOPOLOGIE - SÉRIE 23

Pour cette série, on fixe deux espaces topologiques X, Y et on va considérer les topologies suivantes sur l'ensemble Y^X d'applications (pas forcément continues) $X \to Y$:

- $\mathcal{T}_{\text{po}}$ - la topologie point-ouvert (i.e. la topologie produit);
- $\mathcal{T}_{\text{cc}}$ - la topologie de convergence compacte pour Y métrique;
- $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ - la topologie uniforme pour Y métrique.

Exercice 1. Rappelons que l'on a toujours $\mathcal{T}_{\text{po}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{cc}}$ et aussi $\mathcal{T}_{\text{cc}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{unif}}$ pour Y métrique. Dans certains cas, ces inclusions deviennent des égalités. Montrer que

(a) si X est discret, alors $\mathcal{T}_{\text{po}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) si X est compact, alors $\mathcal{T}_{\text{cc}} = \mathcal{T}_{\text{unif}}$.

Exercice 2. Si Y est un espace métrique complet, montrer que Y^X avec la topologie uniforme l'est aussi.

Exercice 3. Montrer que

(a) $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) $C(I, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^I$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{po}}$.

Exercice 4. (Théorème d'Approximation de Weierstrass) Dans cet exercice, on va analyser l'adhérence de l'ensemble $P(I, \mathbb{R})$ des applications polynomiaux sur I dans $C(I, \mathbb{R})$ par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$. Alors, soit $f \in C(I, \mathbb{R})$ avec $f0 = f1 = 0$, que l'on va considérer comme une fonction sur $\mathbb{R}$ avec $f|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$ (et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$). De plus, posons

$$Q_n(x) := c_n(1 - x^2)^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ et } c_n \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tel que } \qquad \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Observer que les Q_n sont des fonctions paires (i.e. $Q_n(-x) = Q_n(x)$) et positives. Montrer que

(a) $c_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (*Indication: Intégrer jusqu'à* $1/\sqrt{n}$ *et utiliser l'inégalité de Bernoulli*);

(b) $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

En définissant $P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, montrer que

(c) $P_n(x)$ est polynomiale en x (*Indication: Changement de variable* $s := x + t$);

(d) $P_n \to f$ uniformément sur I (*Indication: Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *il y a* $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *tel que* $|y - x| < \delta \Rightarrow |fy - fx| < \varepsilon/2$ *et que l'on utilise pour subdiviser l'intégrale* $P_n(x) - f(x)$ *en trois parties* $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ *et* $[\delta, 1]$).

(e) Généraliser au cas où $f0$ et $f1$ sont arbitraires.

(f) En conclure que $\overline{P(I, \mathbb{R})} = C(I, \mathbb{R})$.

Date: 16 avril 2014