TOPOLOGIE - SÉRIE 22

Exercice 1. Soit $X \neq \varnothing$ un espace métrique complet et $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \to \mathbb{R}$ (i.e. les applications $X \to \mathbb{R}$ dont l'image est bornée) que l'on muni de la norme $\|f\| := \sup_{x \in X} |fx|$. En fixant un point $x_0 \in X$, montrer que $X \to B(X, \mathbb{R})$, $x \mapsto \varphi_x$ avec $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$ est un plongement isométrique.

Définition. Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ et l'inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sont continus.

Exercice 2. Prouver que les suivants sont des groupes topologiques:

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. Soit G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Montrer que

(a) $\overline{H} \subseteq G$ est aussi un sous-groupe;
(b) le quotient $G \twoheadrightarrow G/H$ est ouvert;
(c) si H est normal, $\overline{H}$ l'est aussi;
(d) si H est normal, G/H muni de la topologie quotient et de la multiplication induite de G est aussi un groupe topologique.

Exercice 4. Un *isomorphisme de groupes topologiques* entre deux groupes topologiques G, H est un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ qui est aussi un homéomorphisme.

(a) Soient G, H deux groupes topologiques et $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un morphisme de groupes qui est aussi continu, ouvert et surjectif. Alors, f factorise par le quotient $G/\operatorname{Ker} f$ et l'application induite $G/\operatorname{Ker} f \to H$ est un isomorphisme de groupes topologiques.
(b) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ comme groupes topologiques.

Date: 9 avril 2014