TOPOLOGIE - SÉRIE 21

Exercice 1. Les espaces métriques suivants, sont-ils complets?

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $]0,1[$ (c) Un ensemble X avec la métrique discrète

Exercice 2. Soit X un espace métrique tel qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que tout les $\overline{B(x,\varepsilon)}$ avec $x \in X$ sont compacts. Montrer qu'alors X est complet.

Exercice 3. (Théorème de Baire) Si X est un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles $U_n \subseteq X$ ouverts et denses, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$ est dense aussi.
Indication: Montrer que chaque $U \subseteq X$ ouvert et non-vide intersecte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une surjection continue.

(a) Si X est compact, métrisable et Y est de Hausdorff, alors Y est métrisable.
Indication: Construire une base dénombrable.

(b) Si X est localement connexe (i.e. pour tout point, chaque voisinage contient un voisinage connexe) et f est une application quotient, alors Y est localement connexe.
Indication: X est localement connexe ssi tout ses sous-espaces ouverts ont des composantes connexes ouvertes. De plus, la préimage d'une composante connexe par une application continue est une réunion de composantes connexes.

(c) Conclure que chaque quotient de Hausdorff de I est compact, connexe, localement connexe et possède une base dénombrable.
Indication: Une application continue, surjective et fermée est un quotient.

Remarque. La réciproque de (c) est vraie aussi et connu comme le *théorème de Hahn-Mazurkiewicz*.

Date: 2 avril 2014