TOPOLOGIE - SÉRIE 20

Exercice 1. Vrai ou faux? Un quotient d'un espace T_1 est T_1. Un quotient d'un espace compact est compact.

Exercice 2. La *suspension* d'un espace $X \neq \varnothing$ est $\Sigma X := (X \times I)/\!\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence, engendrée par $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour x, $y \in X$ (faire un dessin!). Démontrer que $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. (Espace projectif) L'espace projectif réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\!\sim \qquad \text{où} \qquad x \sim y \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Ça veut dire $\mathbb{RP}^n$ est l'espace des droites par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

(a) Chaque $\mathbb{RP}^n$ est compact de Hausdorff et $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

(b) Il y a un recouvrement ouvert $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ de $\mathbb{RP}^n$ où tout U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
Indication: U_i est l'image de $V_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1\}$ dans $\mathbb{RP}^n$.

(c) Les compléments des U_i sont homéomorphes à $\mathbb{RP}^{n-1}$.

(d) $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} \cong S^n$ où $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{RP}^n \setminus U_i \subseteq \mathbb{RP}^n$ pour un $i \in 1, \ldots, n+1$.

Exercice 4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$ fermé. Pour toute application continue $f\colon A \to Y$, on définit

$$X \amalg_f Y := (X \amalg Y)/\!\sim \qquad \text{où } \sim \text{ est engendrée par } a \sim f(a)\ \forall a \in A.$$

On dit alors que X a été *attaché* à Y via f, qui est *l'application d'attachement*. En écrivant $q\colon X \amalg Y \to X \amalg_f Y$ pour l'application quotient, montrer que

(a) la restriction $q|_Y\colon Y \to X \amalg_f Y$ est un plongement fermé;

(b) la restriction $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to X \amalg_f Y$ est un plongement ouvert;

(c) $(X \amalg_f Y)/Y \cong X/A$.

Date: 26 mars 2014