## TOPOLOGIE - SÉRIE 18

**Définition.** Un sous-ensemble d'un espace topologique est $G_\delta$ ssi on peut l'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 1.** Dans un espace normal $X$, montrer qu'un fermé $A \subseteq X$ est $G_\delta$ si et seulement s'il existe $f\colon X \to I$ continue tel que $fA \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq ]0,1]$. Conclure que pour deux fermés $A$, $B \subseteq X$ disjoints qui sont $G_\delta$, il existe $f\colon X \to I$ tel que $A = f^{-1}\{0\}$ et $B = f^{-1}\{1\}$.
*Indication: Pour l'implication "$\Rightarrow$", écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (où chaque $U_n$ est ouvert) et choisir des applications d'Urysohn $f_n$ pour $A$ et $X \setminus U_n$.*

**Exercice 2. (Compactifié de Stone-Čech)** Pour un espace topologique $X$, on note $C(X, I)$ l'ensemble des applications continues $X \to I$ et on considère

$$h_X\colon X \to I^{C(X,I)},\ x \mapsto (fx)_{f\in C(X,I)}.$$

Le *compactifié de Stone-Čech* de $X$ est $\beta X := \overline{h_X X}$, ce qui est compact par le théorème de Tychonoff. En notant $\eta_X\colon X \to \beta X$ l'application induite par $h_X$, montrer que

(a) $X$ est complètement régulier ssi $\eta_X$ (ou $h_X$) est un plongement;
*Indication: Un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.*

(b) pour $f\colon X \to Y$ continue, il existe une unique application continue $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ telle que $\beta f \circ \eta_X = \eta_X \circ f$;
*Indication: Pour l'unicité, il faut se souvenir que $\beta Y$ est de Hausdorff et que deux applications continues vers un espace de Hausdorff coïncident, s'ils coïncident sur un sous-ensemble dense.*

(c) si $X$ est compact de Hausdorff, alors $\eta_X$ est un isomorphisme;

(d) si $K$ est compact de Hausdorff et $f\colon X \to K$ continue, il existe une unique application continue $f^\flat\colon \beta X \to K$ telle que $f^\flat \circ \eta_X = f$.

**Définition.** Le *support* d'une application $f\colon X \to \mathbb{R}$ (où $X$ est un espace topologique) est

$$\operatorname{supp} f := \overline{f^{-1}\mathbb{R}^\times} = \overline{\{x \in X \mid fx \neq 0\}}.$$

Une *partition d'unité* sur $X$ est une famille d'applications $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$, telle que $(\operatorname{supp}\varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini (i.e. tout $x \in X$ admet un voisinage $U$ tel que $\{j \in J \mid U \cap \operatorname{supp}\varphi_j \neq \varnothing\}$ est fini) et $\sum_{j\in J}\varphi_j x = 1$ pour tous $x \in X$ (cette somme est finie par la première condition). Si, pour une telle partition d'unité, $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de $X$ on dit que $(\varphi_j)_{j\in J}$ est *subordonnée* à $(U_j)_{j\in J}$ ssi $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Finalement, si pour un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ il existe une partition d'unité subordonnée à $(U_j)_{j\in J}$ on dit qu'il est *numérable*.

**Exercice 3.** Soit $X$ un espace paracompact de Hausdorff. Montrer que

(a) si $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de $X$, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j\in J}$ tel que $\overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$;

(b) un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ est numérable s'il existe une famille $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$ d'applications continues, telle que $(\operatorname{supp}\varphi_j)_{j\in J}$ est localement fini, $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j\in J}\varphi_j\colon X \to \mathbb{R}$ est strictement positive;

(c) chaque recouvrement ouvert de $X$ est numérable.
*Indication: Utiliser (a) pour trouver deux recouvrements ouverts localement finis $(V_j)_{j\in J}$, $(W_j)_{j\in J}$ tels que $\overline{W}_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et utiliser le lemme d'Urysohn.*

---

*Date:* 9 avril 2014