TOPOLOGIE - SÉRIE 17

Exercice 1. Montrer que

(a) $\mathbb{R}_K$ n'est pas régulier;

(b) $\mathbb{R}_l$ est normal;

(c) $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ est régulier.

Exercice 2. Soit X un espace topologique.

(a) Si X est de Hausdorff, on sait qu'un sous-espace compact $A \subseteq X$ est forcément fermé. Est-ce que c'est aussi vrai pour A paracompact?

(b) Si X est paracompact et $A \subseteq X$ fermé, alors A est paracompact aussi.

(c) **(Dieudonné)** Un espace paracompact et de Hausdorff est normal.
Indication: D'abord montrer la régularité.

Définition. Une application continue $f\colon X \to Y$ est appelée *propre* ssi pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$, $(x, z) \mapsto (fx, z)$ est fermée. Si de plus, f est surjective, on dit que f est un *quotient propre* ou *parfaite*.

Exercice 3. Pour une application continue $f\colon X \to Y$, montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

(a) f est propre;

(b) f est fermée et ses fibres $f^{-1}y$ avec $y \in Y$ sont compactes;

(c) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X et $y \in Y$ un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$, alors il existe un point d'accumulation $x \in X$ de $\mathcal{F}$ tel que $fx = y$;

(d) si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X et $y \in Y$ un point limite de $f_*\mathcal{U}$, alors il existe un point limite $x \in X$ de $\mathcal{U}$ tel que $fx = y$.

Indication: Pour "(a) $\Rightarrow$ (b)", montrer que chaque $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est propre et utiliser l'exercice 4 de la série 14. Pour "(d) $\Rightarrow$ (a)", montrer que si on a une famille d'applications continues $(f_i)_{i\in I}$ dont chacune vérifie (d), alors le produit $\prod_{i\in I} f_i$ vérifie (d) aussi. Ensuite, il suffit de montrer qu'une application qui vérifie (d) est fermée.

Exercice 4. Soit $p\colon X \to Y$ un quotient propre. Montrer que

(a) si X est de Hausdorff/régulier, alors Y l'est aussi;
Indication: Si $g\colon X \to Y$ est continue et fermée, $M \subseteq Y$ et $U \subseteq X$ un voisinage ouvert de $g^{-1}M$, alors il existe un voisinage ouvert V de M avec $g^{-1}V \subseteq U$.

(b) si Y est compact, alors X l'est aussi.

Date: 5 mars 2014