TOPOLOGIE - SÉRIE 16

Exercice 1. Montrer que chaque espace métrique compact est séquentiellement compact.

Définition. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un espace X, son filtre associé est le filtre engendré par tout les $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour un espace topologique X, montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X avec un point d'accumulation $x \in X$, alors on peut étendre $\mathcal{F}$ en un ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui converge vers x.
Indication: Considérer $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{F}$.

(b) un point $x \in X$ est un point d'accumulation/point limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il l'est pour le filtre associé.

(c) si x est un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant le filtre associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergent vers x.

Définition. Un espace X est *paracompact* ssi tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X admet un raffinement ouvert localement fini où un recouvrement (ouvert) $\mathcal{V}$ est appelé

- un *raffinement (ouvert)* de $\mathcal{U}$ ssi chaque $V \in \mathcal{V}$ est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$;
- *localement fini* ssi tout $x \in X$ a un voisinage qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

Exercice 3. Montrer qu'un produit d'un espace paracompact et d'un espace compact est de nouveau paracompact. Similairement, si un produit $X \times Y$ est paracompact et $Y \neq \varnothing$ est T_1, alors X est paracompact.

Exercice 4. (Théorème de A. H. Stone) Montrer qu'un espace métrisable est paracompact.

Indication: Par le théorème de la série précédente, on peut toujours indicer un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ par un ensemble bien ordonné I. Alors, pour chaque $x \in X$ il y a $m(x) \in I$ minimal avec $x \in U_{m(x)}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{>0}$ on définit des ouverts $\{V_i^n\}_{i\in I}$ comme suit: Chaque V_i^n est la réunion des $B(x, 2^{-n})$ tels que

(a) $i = m(x)$;   (b) $x \notin V_j^m$ pour tous $m < n$, $j \in I$;   (c) $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_i$.

Maintenant, il faut montrer que $\{V_i^n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0},\, i\in I}$ est un raffinement ouvert de $\mathcal{U}$ qui est localement fini. Pour la vérification du dernier point, on prend pour chaque $x \in X$ le $i \in I$ minimal tel que $x \in V_i^n$ pour un $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (que l'on fixe aussi). En choisissant $k \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$, on montre que la boule $B(x, 2^{-(n+k)})$ intersecte seulement un nombre fini de V_j^m en montrant que

(1) pour $m \geqslant n + k$, elle ne l'intersecte pas;

(2) pour $m < n + k$, elle l'intersecte pour au plus un $j \in I$.

Date: 5 mars 2014