TOPOLOGIE - SÉRIE 15

Exercice 1. Pour un espace métrique X, un point $x \in X$ et $\varnothing \neq M \subseteq X$, on définit

$$d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y), \qquad \text{la } \textit{distance} \text{ entre } x \text{ et } M.$$

Montrer que

(a) pour $\varnothing \neq M \subseteq X$ fixé, la fonction $d(-, M)\colon X \to \mathbb{R}$ est continue;

(b) $\overline{M} = \{x \in X \mid d(x, M) = 0\}$ pour tout $\varnothing \neq M \subseteq X$.

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 2. En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i \in I}$ est non-vide (a.k.a. l'axiome du choix).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i \in I}$.

Exercice 3. (Théorème d'Alexandre) Soit $\mathcal{S}$ une sous-base pour la topologie d'un espace X. Si chaque recouvrement de X par ouverts de $\mathcal{S}$ admèt un sous-recouvrement fini, X est compact.
Indication: Preuve par absurde. Supposer qu'il y a un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X sans point-limite.

Définition. Un ensemble totalement ordonné est *bien ordonné* ssi tout sous-ensemble non-vide a un minimum. On note qu'un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est aussi bien ordonné.

Théorème. Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Définition. On définit un ensemble bien ordonné Ω comme suit: Soit X un ensemble bien ordonné indénombrable (e.g. $\mathbb{R}$ muni d'un bon ordre arbitraire). Si chaque ${\downarrow}x := \{y \in X \mid y < x\}$ avec $x \in X$ est dénombrable, alors $\Omega := X$ et sinon, on trouve le plus petit $x \in X$ avec ${\downarrow}x$ indénombrable et on pose $\Omega := {\downarrow}x$.

Exercice 4. Montrer que

(a) $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact mais pas séquentiellement compact.

(b) Ω muni de la topologie d'ordre est séquentiellement compact mais pas compact.
Indication: Chaque suite dans Ω est bornée.

Date: 18 février 2014