TOPOLOGIE - SÉRIE 13

Exercice 1. Montrer que pour un espace compact $(X, \mathcal{T})$, toute projection

$$\mathrm{pr}_2 \colon (X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$$

avec $(Y, \mathcal{T}')$ un espace quelconque est fermée (i.e. l'image d'un fermé par pr_2 reste fermé).

Remarque. Une application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est appelée *propre* si et seulement si pour tout espace $(Z, \mathcal{T}'')$, l'application produit $f \times \mathrm{id}_Z \colon (X \times Z, \mathcal{T} * \mathcal{T}'') \to (Y \times Z, \mathcal{T}' * \mathcal{T}'')$ est fermé. Alors l'exercice dit que pour $(X, \mathcal{T})$ compact, l'application unique $X \to *$ est propre.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (vu comme sous-espaces de $\mathbb{R}^{n^2}$ avec la topologie standard) sont compacts.
Indication: Une matrice est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale.*

Exercice 3. (Compactifié d'Alexandrov) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X + \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ ouvert si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;

(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé;

(c) si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact;

(d) chaque application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé *propre*) induit une application continue $\dot{f} \colon \dot{X} \to \dot{Y}$ avec $\dot{f}|_X = f$ et $\dot{f}(\infty) = \infty$;

(e) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact de Hausdorff, $x \in X$ et $X' := X \setminus \{x\}$, alors $\dot{X}'$ est homéomorphe à $(X, \mathcal{T})$;

(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.
Indication: Projection stéréographique.

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{PFlt}(X)$ l'ensembles des filtres propres sur X, partiellement ordonné par inclusion.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X, prouver que les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $\mathcal{F}$ est un élément maximal dans $\mathrm{PFlt}(X)$.

(b) Pour tout $A \subseteq X$, soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

En utilisant le lemme de Zorn, déduire que l'on peut étendre tout filtre en un ultrafiltre.

Date: 11 décembre 2013