TOPOLOGIE - SÉRIE 12

Dans la géométrie différentielle on parle souvent des “variétés connexes” même si on veut vraiment dire “variétés connexes par arcs”. L'exercice suivant est une justification pour ça.

Exercice 1. Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.
Indication: Utiliser la caractérisation du cours et conclure que les composantes connexes par arcs sont ouvertes.

Exercice 2. Dans cet exercice tous les espaces de matrices sont considérés comme sous-espaces de $\mathbb{C}^{n^2}$ muni de la topologie standard. Déterminer les composantes connexes par arcs de

(a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
(c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$
(d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
(e) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Indication: Pour (a) et (c), se convaincre que pour chaque $A \in \mathrm{GL}_n$, *ils existent des matrices élémentaires* $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l$ *de la forme* $E + \lambda E_{i,j}$ *avec* $i \neq j$ *telles que* $P_1 \ldots P_k A Q_1 \ldots Q_l$ *est une matrice diagonale. Après réduire au cas* SO_n *et utiliser l'exercice 4 de la semaine passée. Pour (b) et (d), réduire à (a) et (c).*

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à des topologies différentes.

(a) Déterminer les composantes connexes par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, *_{n\in\omega} \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.
(b) Montrer que deux suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$ si et seulement si $x - y = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$.
(c) Démontrer que deux suites x, y sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ si et seulement si $x - y$ est nulle presque partout (i.e. ssi $x - y \in \mathbb{R}^\infty$).
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$. *De plus, si* $x \notin \mathbb{R}^\infty$ *il existe un homéomorphisme* $f\colon (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}}) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\mathrm{box}})$ *tel que* $f(0) = 0$ *et* $f(x)$ *n'est pas bornée.*

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

$$\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ est un point d'accumulation de } \mathcal{F}\}.$$

Date: 6 décembre 2013