TOPOLOGIE - SÉRIE 9

Exercice 1. Soit (Y, d) un espace métrique et X un ensemble. Montrer qu'une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $f\colon X \to Y$ si et seulement si elle converge vers f dans $\left(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar{\rho}}\right)$ où $\bar{\rho}$ est la métrique uniforme.

Exercice 2. Trouver deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ et une application non continue $f\colon X \to Y$ tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergente vers un $x \in X$, la suite $(fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fx.

Exercice 3. Montrer que

(a) "être de Hausdorff" et "être métrisable" sont des propriétés topologiques;

(b) une application $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, bijective et fermée (i.e. l'image d'un fermé par f est fermé);

(c) si $\left(f_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X'_i, \mathcal{T}'_i)\right)_{i\in I}$ est une famille d'homéomorphismes alors

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathop{*}_{i\in I} \mathcal{T}_i\right) \cong \left(\prod_{i\in I} X'_i, \mathop{*}_{i\in I} \mathcal{T}'_i\right).$$

Exercice 4. Considérons les groupes

$$\mathrm{SO}_n := \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \;\middle|\; AA^t = E \text{ et } \det A = 1\right\}$$

$$\mathrm{SU}_n := \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} \;\middle|\; AA^* = E \text{ et } \det A = 1\right\}$$

comme sous espaces de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ et $(\mathbb{C}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un *groupe topologique*, ce qui veut dire que la multiplication des matrices et prendre l'inverse sont des applications continues

$$\mu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \iota\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En conclure que SO_n et SU_n sont aussi des groupes topologiques (en fait des sous groupes topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

(c) Montrer que $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ comme groupes topologiques, ce qui veut dire qu'il existe un isomorphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ qui est aussi un homéomorphisme.

(d) Montrer que SU_2 est homéomorphe à S^3.

Date: 14 novembre 2013