TOPOLOGIE - SÉRIE 7

Exercice 1. Montrer que

(a) tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff;

(b) tout produit de deux espaces de Hausdorff est de Hausdorff;

(c) si $(Y, \mathcal{T}')$ est un espace de Hausdorff et $f\colon (X, \mathcal{T}) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est une injection continue alors $(X, \mathcal{T})$ est aussi de Hausdorff.

Exercice 2. Les mêmes énoncés que dans 1(a) et (b) mais avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff". Trouver un contrexemple pour l'énoncé 1(c) avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff".

Exercice 3. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et les $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{T}_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

On se souvient qu'une application $(f_1, f_2)\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y \times Z, \mathcal{T}_Y * \mathcal{T}_Z)$ est continue si et seulement si $f_1\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ et $f_2\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ sont continues. En reversant la situation, on se demande si un résultat analogue est juste pour une application $X \times Y \to Z$.

Exercice 4. Considérons $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $I := [0,1]$ comme sous-espaces de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement (munis des topologies standards) et définissons

$$f\colon (S^1 \times I, \mathcal{T}_{S^1} * \mathcal{T}_I) \to (S^1, \mathcal{T}_{S^1}),\ (e^{i2\pi\varphi}, t) \mapsto e^{i2\pi\varphi^t}$$

où $\varphi \in \,]0,1]$ (et donc φ^t est bien-défini pour tout $t \in I$).

(a) Montrer que f est continue en chaque variable. Plus spécifiquement, ça veut dire que pour tout $z \in S^1$ et $t \in I$, les applications

$$f(z,-)\colon \begin{array}{rcl} (I, \mathcal{T}_I) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ s & \mapsto & f(z,s) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f(-,t)\colon \begin{array}{rcl} (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) & \to & (S^1, \mathcal{T}_{S^1}) \\ w & \mapsto & f(w,t) \end{array}$$

sont continues.

(b) L'application f, est-elle continue?

Date: 22 novembre 2013