TOPOLOGIE - SÉRIE 6

Exercice 1. Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Prouver que f est continue si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x\in X\,\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\,\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0}\,\forall x'\in X: d(x,x')<\delta \;\Rightarrow\; d'(f(x),f(x'))<\varepsilon.$$

Exercice 2. Soient $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y,\mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y,y) \mid y\in Y\} \subseteq Y\times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}'*\mathcal{T}'$ sur $Y\times Y$.

(b) Pour $(Y,\mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D\subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g\colon (X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ continues, montrer que $f=g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Exercice 3. Soient Y un ensemble totalement ordonné (muni de la topologie d'ordre), $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et f, $g\colon (X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_<)$ deux applications continues. Montrer que

(a) $\{x\in X \mid f(x)\leqslant g(x)\}\subseteq X$ est fermé;

(b) l'application minimum $\min\colon (Y\times Y,\mathcal{T}_<*\mathcal{T}_<)\to(Y,\mathcal{T}_<)$ est continue.
Indication: Lemme de Recollement.

Définition. Pour une application d'ensembles $f\colon X\to Y$ et un filtre $\mathcal{F}$ sur X on définit *l'image directe* de $\mathcal{F}$ par f

$$f_*\mathcal{F} := \mathcal{F}_Y\,\{fA \mid A\in\mathcal{F}\} \overset{(*)}{=} \left\{B\subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}B\in\mathcal{F}\right\}$$

comme le filtre engendré par les images directes des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 4. Soit $f\colon X\to Y$ une application quelconque.

(a) Montrer l'égalité $(*)$ ci-dessus et conclure que l'image directe $f_*\mathcal{F}$ d'un filtre propre $\mathcal{F}$ est de nouveau propre.
Indication: Les fA avec $A\in\mathcal{F}$ forment une base de filtre.

Maintenant suppose que X et Y sont de plus munis de topologies et $x\in X$. Montrer que

(b) si f est continue et x un point d'accumulation d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X alors fx est un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$;

(c) f est continue en x si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F}\to x$ implique $f_*\mathcal{F}\to fx$.

Date: 24 octobre 2013