TOPOLOGIE - SÉRIE 4

Exercice 1. Pour un espace métrique (X, d), $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que la boule fermée

$$\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

est vraiment fermée dans X et montrer qu'elle inclut l'adhérence de la boule ouverte

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Donner un exemple où cette inclusion $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \bar{B}(x, \varepsilon)$ est stricte.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i \in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subset$" ou "$\supset$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

(a) si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \overline{N}$;

(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;

(c) $\bigcup_{i \in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$;

(d) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$;

(e) $\bigcap_{i \in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} M_i}$;

(f) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

Exercice 3. Considérons une droite $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit X un ensemble totalement ordonné et définissons la *topologie d'ordre* sur X, ayant tous les

$$]x, \infty[:= \{y \in X \mid x < y\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty, x[:= \{y \in X \mid y < x\}$$

(avec $x \in X$) comme sous-base. Montrer que

(a) les intervalles de la forme $]x, y[:= \{z \in X \mid x < z < y\}$ sont ouverts et les intervalles de la forme $[x, y] := \{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ sont fermés;

(b) Si X possède un élément minimal m, les intervalles de la forme $[m, x[$ sont ouverts et da la même façon, si X possède un élément maximal M, les intervalles de la forme $]x, M]$ sont ouverts.

Soit maintenant $X := I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, muni de la topologie d'ordre lexicographique. Déterminer les adhérences des sous-ensembles suivants de I^2:

$A = \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$B = \{(1 - 1/n, 1/2) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$C =]0, 1[\times \{0\}$,

$D =]0, 1[\times \{1/2\}$,

$E = \{1/2\} \times]0, 1[$.

Date: 9 octobre 2013