TOPOLOGIE - SÉRIE 3

Exercice 1. Considérer $X := \mathbb{R} \amalg \{*\}$ la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et d'un singleton $\{*\}$. Poser

$$\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{X \setminus M \mid M \subseteq \mathbb{R} \text{ fini}\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie.

(b) Montrer que pour tout espace topologique Y et tout $y \in Y$ l'ensemble

$$\mathcal{V}(y) := \{N \subseteq Y \mid \text{il existe } V \subseteq Y \text{ ouvert tel que } y \in V \subseteq N\}$$

des voisinages de y forme un filtre.

(c) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ engendrée par $\mathcal{B}$ n'est pas *métrisable*, i.e. il n'y a aucune métrique d sur X telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_d$.
Indication: Dans un espace métrisable Y tous les $\mathcal{V}(y)$ ont une base de filtre dénombrable.

Exercice 2. Montrer que d et d' ci-dessous définissent des métriques sur l'ensemble $C[0,1]$ des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$:

$$d\colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_0^1 |fx - gx| \,\mathrm{d}x,$$

$$d'\colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |fx - gx|.$$

De plus, montrer que la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est strictement moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d'}$ induite par d' (i.e. $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_{d'}$).
Indication: Pour l'inégalité, construire une suite de fonctions qui converge par rapport à d mais ne converge pas par rapport à d'.

Exercice 3. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_1$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_2$ = la topologie de $\mathbb{R}_K$, dont une base est donnée par les intervalles ouverts ordinaires et les $]a,b[\setminus K$ où $a,\, b \in \mathbb{R}$ et $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;
- $\mathcal{T}_3$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_4$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a,b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_5$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base.

Pour chacune, déterminer lesquelles des autres topologies elle contient.

Exercice 4. Pour un ensemble X, montrer que les

$$M^{\uparrow} = {\uparrow}\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$. De même, pour un ensemble partiellement ordonné P, montrer que les

$${\uparrow}p := \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P.

Date: 4 octobre 2013