TOPOLOGIE - SÉRIE 1

Exercice 1. Soit $f\colon A \to B$ une application. Prouver que

(a) $A' \subseteq f^{-1}fA'$ pour tout $A' \subseteq A$, avec égalité si f est injective;

(b) $ff^{-1}B' \subseteq B'$ pour tout $B' \subseteq B$, avec égalité si f est surjective;

Preuve. Ad (a): Soit $a \in A'$. Puisque $f(a) \in f(A')$, on a que $a \in f^{-1}f(A')$. Par conséquent, $A' \subseteq f^{-1}f(A')$.

Supposons f injective et soit $a \in f^{-1}f(A')$. Alors puisque $f(a) \in f(A')$, il existe $\tilde{a} \in A'$ tel que $f(a) = f(\tilde{a})$. Puisque f est injective, $a = \tilde{a} \in A'$. Nous avons donc montré que $f^{-1}f(A') = A'$ lorsque f est injective.

Ad (b): Soit $b \in ff^{-1}(B')$. Par définition, il existe $a \in f^{-1}(B')$ tel que $b = f(a)$. Puisque $a \in f^{-1}(B')$, $b = f(a) \in B'$. Par conséquent, $ff^{-1}B' \subset B'$.

Supposons f surjective et soit $b \in B'$. Alors il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$, c'est-à-dire tel que $a \in f^{-1}B'$. Par conséquent, $b = f(a) \in ff^{-1}B'$. Nous avons donc montré que $ff^{-1}B' = B'$ lorsque f est surjective. □

Exercice 2. Pour une application $f\colon A \to B$ montrer que

(a) l'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments; i.e. pour tous B', $B'' \subseteq B$ et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ avec $B_i \subseteq B$

$$B' \subseteq B'' \;\Rightarrow\; f^{-1}B' \subseteq f^{-1}B'', \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}B_i,$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}B_i \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}B';$$

(b) l'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions, i.e. pour tous A', $A'' \subseteq A$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ avec $A_i \subseteq A$

$$A' \subseteq A'' \;\Rightarrow\; f(A') \subseteq f(A'') \quad \text{et} \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Preuve. Ad (a): L'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments.

$B' \subset B'' \Longrightarrow f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B'')$; en effet

$$x \in f^{-1}(B') \Longrightarrow f(x) \in B' \subset B'' \Longrightarrow x \in f^{-1}(B'').$$

$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; en effet

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; en effet

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

$f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}(B')$; en effet

$$x \in f^{-1}(B \setminus B') \iff f(x) \in B \setminus B' \iff f(x) \notin B' \iff x \in A \setminus f^{-1}(B').$$

Ad (b): L'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions.

$A' \subset A'' \implies f(A') \subset f(A'')$; c'est évident.

$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$; en effet

$$y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff \text{ il existe } x_i \in A_i \text{ tel que } y = f(x_i) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Définition. En notant $\mathfrak{P}X$ pour l'ensemble des parties d'un ensemble X, un *filtre* sur X est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}X$ non-vide tel que

(a) si A, $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous intersections finies);

(b) si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B \in \mathcal{F}$. (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous extensions)

En particulier, on a $X \in \mathcal{F}$. Un tel filtre $\mathcal{F}$ est dit *propre* si et seulement si de plus

(c) $\mathcal{F} \neq \mathfrak{P}X$ ou de manière équivalente $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Notons $\mathrm{Flt}(X)$ pour l'ensemble des filtres sur X, qui est partiellement ordonné par inclusion. Parce que le filtre non propre $\mathcal{F} = \mathfrak{P}X$ n'est pas très intéressant, tous les filtres sont supposés propres sauf si dit autrement. Finalement, un filtre propre $\mathcal{F}$ est appelé *ultrafiltre* si et seulement si pour tous A, $B \subseteq X$

(d) $A \cup B \in \mathcal{F}$ implique $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 3. Pour $x \in X$, montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_x := \Uparrow\{x\} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ est un ultrafiltre, appelé *l'ultrafiltre principal* engendré par x.

Preuve. Nous allons verifier les points (a) à (d) de la définition précédente.

(a) Soit $A, B \in \mathcal{U}_x$. alors $x \in A$ et $x \in B$, ce qui implique que $x \in A \cap B$ et donc $A \cap B \in \mathcal{U}_x$.

(b) Soit $A \in \mathcal{U}_x$ et $A \subseteq B \subseteq X$. alors $x \in A \subseteq B$ et donc $B \in \mathcal{U}_x$.

(c) $x \notin \varnothing$.

(d) Soient A, B deux sous-ensembles de X. Si $A \cup B \in \mathcal{U}_x$, alors $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$. Ceci montre que $A \in \mathcal{U}_x$ ou $B \in \mathcal{U}_x$. □

Exercice 4. Soit X un ensemble arbitraire. Montrer que

(a) l'intersection $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ d'une famille des filtres $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est aussi un filtre;

(b) pour $S \subseteq \mathfrak{P}X$ un ensemble de parties, l'ensemble

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \dots, A_n \in S \colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}$$

est le plus petit filtre (peut être non propre) qui contient S; i.e. $\mathcal{F}_X S$ est *engendré* par S;

(c) si l'ensemble S de (b) satisfait $\varnothing \notin S$ et pour chaque A, $B \in S$, il y a $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$ (on dit que S est une *base* de filtre), alors $\mathcal{F}_X S$ est propre.

Preuve. Ad (a): Soit $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ l'intersection d'une famille de filtres. En utilisant la définition d'intersection on déduit les propriétés suivantes pour $\mathcal{F}$, qui montrent que $\mathcal{F}$ est un filtre.

- Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors pour tout $i \in I$ on a que $A \cap B \in \mathcal{F}_i$, et donc $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B$, alors pour tout $i \in I$ on a que $B \in \mathcal{F}_i$, et donc $B \in \mathcal{F}$.
- Comme tout $\mathcal{F}_i$ est propre, il y a un $j \in I$ tel que $\varnothing \notin \mathcal{F}_i$. Donc $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Ad (b): Soit

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in S \colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}\,.$$

On va montrer que $\mathcal{F}_X S$ est un filtre (peut être impropre).

- Si $M, N \in \mathcal{F}_X S$, alors pour certains $m, n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_m, B_1, \cdots, B_n \in S$ on a que

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_m \subseteq M \text{ et } B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq N;$$

  mais alors

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq M \cap N,$$

  ce qui signifie que $M \cap N \in \mathcal{F}_X S$.
- Si $M \in \mathcal{F}_X S$ il y a $m \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_m \in S$ tels que $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$. Ensuite si $M \subseteq N$, on a que

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M \subseteq N,$$

  et donc $N \in \mathcal{F}_X S$.

Maintenant, clairement $\mathcal{F}_X S$ contient S. Ensuite on remarque que pour tout filtre $\mathcal{F}$ contenant S, il faut que $\mathcal{F}$ contienne $\mathcal{F}_X S$. En effet, si $M \in \mathcal{F}_X S$, et $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$ pour des $A_1, \ldots, A_n \in S$, alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$ et finalement $M \in \mathcal{F}$. *Ad (c):* Supposons que S ne contient pas $\varnothing$ et que pour tous $A, B \in S$ il existe $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$. On va montrer que tous éléments de M ne sont pas vide. Soit $M \in \mathcal{F}_X S$, satisfaisant $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$ pour des $A_1, \ldots, A_n \in S$. Par induction il y a un $A \in S$ tel que $A \subseteq A_1 \cap \ldots \cap A_n$, et donc

$$A \subseteq A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M;$$

en particulier M n'est pas vide. $\square$

Une propriété importante des ultrafiltres (que l'on va montrer plus tard dans le cours):

Théorème de l'Ultrafiltre. Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.

TOPOLOGIE - SÉRIE 2

Exercice 1. Pour un espace topologique X et $M \subseteq X$, montrer que M est ouvert si et seulement si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x \in U \subseteq M$.

Preuve. Le sens direct est évident, il suffit de prendre $U = M$ pour tout $x \in X$. Supposons en revanche que pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq M$. Alors $\bigcup_{x \in M} U_x = M$ qui est donc ouvert comme réunion d'ouverts. $\square$

Exercice 2. On définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (appelé la *topologie des entiers uniformément espacés*) comme suit:

$$U \subseteq \mathbb{Z} \text{ est ouvert } :\Leftrightarrow \ U \text{ est une réunion d'ensembles de la forme } a\mathbb{Z} + b$$

(où a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ et où $a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}$). Montrer que

(a) c'est vraiment une topologie sur $\mathbb{Z}$;

(b) les $a\mathbb{Z} + b$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ sont fermés (i.e. leurs compléments sont ouverts) et ouverts (*clopen* en anglais);

(c) $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0)$ et donc, en notant qu'un ensemble non vide et fini $U \subseteq \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert, qu'il y a une infinité des nombres premiers.

Preuve.

(a) Il s'agit de vérifier que l'ensemble des $a\mathbb{Z} + b$ forme une base de topologie. Puisque $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} + 0$, tout entier appartient à un ouvert de base. De plus, si $x \in (a\mathbb{Z} + b \cap a'\mathbb{Z} + b')$, alors $x \in aa'\mathbb{Z} + x \subseteq (a\mathbb{Z} + b) \cap (a'\mathbb{Z} + b')$.

(b) Si le reste dans la division de b par a est r, alors

$$a\mathbb{Z} + b = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{\substack{i=0,\ldots,a-1 \\ i \neq r}} a\mathbb{Z} + i \right),$$

ce qui montre que $a\mathbb{Z} + b$ est fermé.

(c) L'égalité d'ensembles provient du fait que tout entier différent de $-1, 1$ est divisible par un nombre premier.

Supposons par l'absurde qu'il existe seulement un nombre fini de nombres premiers. Alors $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ est une union finie de fermés, donc un fermé, ce qui implique que $\{-1, 1\}$ est un ouvert non vide.

Il suffit donc de montrer que tout ouvert non vide est infini pour obtenir une contradiction. Or tout ouvert non vide contient un ensemble de la forme $a\mathbb{Z} + b$, qui est en bijection avec $\mathbb{Z}$ et donc infini. $\square$

Exercice 3. Vrais ou faux?

(a) Un espace topologique est discret (i.e. chaque $U \subseteq X$ est ouvert) si et seulement si chaque singleton $\{x\} \subseteq X$ est ouvert.

(b) Pour un espace topologique fini X, si tout singleton $\{x\} \subseteq X$ est fermé (i.e. $X \setminus \{x\} \subseteq X$ est ouvert) alors la topologie sur X est la topologie discrète (i.e. tout $U \subseteq X$ est ouvert).

(c) Et pour X dénombrable?

Preuve.

(a) OUI. En effet, c'est claire que si tout sous-ensemble est ouvert les singletons le sont. Ensuite, on peut écrire tout sous-ensemble comment une réunion de singletons, et donc si les singletons sont ouvert la topologie est discrète.

(b) OUI. En effet, si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ on a que

$$\{x_i\} = \bigcap_{j \neq i} X \setminus \{x_j\},$$

qui est ouvert.

(c) NON. Considerons $\mathbb{N}$ avec la topologie **cofinie** (i.e., les ouverts sont tous et seules les compléments de sous-ensembles finis et $\varnothing$). Alors par définition les singletons sont fermés, mais la topologie n'est pas discrète, comme $\{0,1\} \subseteq \mathbb{N}$ n'est pas ouvert. □

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{UFlt}(X)$ l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Exercice 4. Pour un ensemble X, un $S \subseteq \mathrm{UFlt}(X)$ est appelé *fermé* ssi $S = \varnothing$ ou

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \qquad \text{implique} \qquad \mathcal{U} \in S \qquad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U} \text{ sur } X.$$

En prenant comme ouverts les compléments des fermés, montrer que ça définit une topologie sur $\mathrm{UFlt}(X)$ (que l'on appelle la *topologie de Zariski*).

Preuve. On va montrer que ça définit une topologie.

- Soit $\{\mathrm{UFlt}(X) \setminus S_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts dans $\mathrm{UFlt}(X)$. Supposons que

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in \bigcap_{i \in I} S_i} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}.$$

Alors pour tous $i \in I$ on a

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_i} \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\mathcal{F} \in \bigcap_{i \in I} S_i} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U},$$

ce qui donne $\mathcal{U} \in S_i$, et finalement $\mathcal{U} \in \bigcap_{i \in I} S_i$. Donc $\bigcap_{i \in I} S_i$ est fermé et finalement $\bigcup_{i \in I}(\mathrm{UFlt}(X) \setminus S_i) = \mathrm{UFlt}(X) \setminus (\bigcap_{i \in I} S_i)$ est ouvert.

- Soient S_1 et S_2 deux fermés. On va montrer que $S_1 \cup S_2$ est fermé, d'où l'ensemble

$$UFlt(X) \setminus (S_1 \cup S_2) = (UFlt(X) \setminus S_1) \cap (UFlt(X) \setminus S_1)$$

est ouvert. La même preuve marche pour un nombre fini de fermés $S_1, \dots, S_n$.
Supposons par contradiction que

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \;\text{ mais }\; \mathcal{U} \notin S_1 \cup S_2.$$

Puisque S_1 et S_2 sont fermés, on deduit que pour $i = 1, 2$

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S_i} \mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{U},$$

et cela signifie qu'il existe $Y_i \subseteq X$, $Y_i \in \mathcal{F}$ pour tous $\mathcal{F} \in S_i$ tel que $Y_i \notin \mathcal{U}$. Alors $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{F}$ pour tout $\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2$, c'est à dire

$$Y_1 \cup Y_2 \in \bigcap_{\mathcal{F} \in S_1 \cup S_2} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}.$$

Mais $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, donc il faut qu'un entre Y_1 et Y_2 soit un élément de $\mathcal{U}$, ce qui est une contradiction. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 3

Exercice 1. Considérer $X := \mathbb{R} \amalg \{*\}$ la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et d'un singleton $\{*\}$. Poser

$$\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{X \setminus M \mid M \subseteq \mathbb{R} \text{ fini}\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie.

(b) Montrer que pour tout espace topologique Y et tout $y \in Y$ l'ensemble

$$\mathcal{V}(y) := \{N \subseteq Y \mid \text{il existe } V \subseteq Y \text{ ouvert tel que } y \in V \subseteq N\}$$

des voisinages de y forme un filtre.

(c) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ engendrée par $\mathcal{B}$ n'est pas *métrisable*, i.e. il n'y a aucune métrique d sur X telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_d$.
Indication: Dans un espace métrisable Y tous les $\mathcal{V}(y)$ ont une base de filtre dénombrable.

Preuve. (a) Puisque X est un élément de $\mathcal{B}$, il est clair que tout $x \in X$ appartient à un élément de la base. Soient $A, B \in \mathcal{B}$ deux ouverts de base et $x \in A \cap B$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in \{x\} \subseteq A \cap B$ et $\{x\}$ est un ouvert de base. Si $* \in A \cap B$, alors $A = X \setminus M$ et $B = X \setminus M'$ pour $M, M' \subseteq \mathbb{R}$ finis. Dans ce cas, $* \in X \setminus (M \cup M') = A \cap B$.

(b) Soit $S_x = \{U \subseteq X : x \in U \text{ et } U \text{ ouvert}\}$. Le filtre des voisinages de x est exactement $\mathcal{V}(x) = \mathcal{F}_X(S_x)$, puisque une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Par conséquent, $\mathcal{V}(x)$ est bien un filtre par la série 1. On appellera *voisinage de x* les éléments de $\mathcal{V}(x)$.

(c) On remarque qu'un espace métrisable M admet une base dénombrable pour le filtre des voisinage en chaque $x \in M$ donnée par

$$S_x = \left\{B(x, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nous allons montrer que $*$ n'admet pas une base dénombrable pour le filtre des voisinages dans X muni de la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. Par la remarque précédente, cela suffit à montrer que X n'est pas métrisable.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinage de $*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $S_n \in \mathcal{V}(*)$, il existe un ouvert de base $X \setminus M_n$ avec $M_n \subseteq \mathbb{R}$ fini qui est inclus dans S_n.
Puisque $S = \{S_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}_X\{X \setminus M_n : n \in \mathbb{N}\}$, on a par l'exercice 4 de la série 1 et par hypothèse que

$$\mathcal{V}(*) = \mathcal{F}_X S \subseteq \mathcal{F}_X\{X \setminus M_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V}(*).$$

Donc, la collection des $(X \setminus M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme aussi une base du filtre des voisinages de $\mathcal{V}(*)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de $*$. par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$X \setminus (M_0 \cup \ldots \cup M_n) \subseteq X \setminus \{x\},$$

c'est-à-dire tel que $x \in M_0 \cup \ldots \cup M_n$. Par conséquent, $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ et donc $\mathbb{R}$ est dénombrable, une contradiction.
Par conséquent, la topologie sur X engendrée par la base $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable. $\square$

Exercice 2. Montrer que d et d' ci-dessous définissent des métriques sur l'ensemble $C[0,1]$ des fonctions continues de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$:

$$d\colon C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R},\ (f,g)\mapsto\int_0^1 |fx-gx|\,\mathrm{d}x,$$

$$d'\colon C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R},\ (f,g)\mapsto\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\,.$$

De plus, montrer que la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est strictement moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d'}$ induite par d' (i.e. $\mathcal{T}_d\subsetneq\mathcal{T}_{d'}$).
Indication: Pour l'inégalité, construire une suite de fonctions qui converge par rapport à d mais ne converge pas par rapport à d'.

Preuve. On va montrer que d et d' sont des métriques. Soient $f,g,h:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ des fonctions continues. On a que:

- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x\geq 0$, puisque l'intégrande est positif;
- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x=0\iff|fx-gx|=0$ pour tout $x\in\mathbb{I}\iff fx=gx$ pour tout $x\in\mathbb{I}$;
- $d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x=\int_0^1|gx-fx|\,\mathrm{d}x=d(g,f)$;
- Pour l'inégalité du triangle, on a que

$$\begin{aligned}d(f,h)=\int_0^1|fx-hx|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1|(fx-gx)+(gx-hx)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1|(fx-gx)|+|(gx-hx)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1|(fx-gx)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|(gx-hx)|\,\mathrm{d}x=d(f,g)+d(g,h).\end{aligned}$$

Donc d est bien une métrique. Ensuite on a que:

- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\geq 0$;
- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|=0\iff|fx-gx|=0$ pour tout $x\in\mathbb{I}\iff fx=gx$ pour tout $x\in\mathbb{I}$;
- $d'(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|=\sup_{x\in[0,1]}|gx-fx|=d'(g,f)$;
- $d'(f,h)=\sup_{x\in[0,1]}|fx-hx|\,\mathrm{d}x=\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)+(gx-hx)|\leq$
  $\leq\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)|+|(gx-hx)|\leq$
  $\sup_{x\in[0,1]}|(fx-gx)|+\sup_{x\in[0,1]}|(gx-hx)|=d'(f,g)+d'(g,h)$.

Donc d' est bien une métrique.

De plus, $\mathcal{T}_{d'}$ est plus fine que $\mathcal{T}_d$. En effet, on a l'inégalité:

$$d(f,g)=\int_0^1|fx-gx|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|\,\mathrm{d}x=$$

$$(\sup_{x\in[0,1]}|fx-gx|)(\int_0^1\mathrm{d}x)=d'(f,g)\cdot 1=d'(f,g).$$

Cela signifie que pout tout r réel on a $B_{d'}(f,r)\subseteq B_d(f,r)$, et donc $\mathcal{T}_d\subseteq\mathcal{T}_{d'}$.

Par ailleurs, il existe une suite dans $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ qui converge selon $\mathcal{T}_d$, mais pas selon $\mathcal{T}_{d'}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = x^n$. Alors on a que

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n x| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ selon $\mathcal{T}_d$. Pourtant pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que

$$d'(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n x| = \sup_{x\in[0,1]} x^n \geq 1^n = 1.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 selon $\mathcal{T}_{d'}$. Comme $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ et les éspaces métriques sont d'Hausdorff, si la limite existait, il faudrait qu'elle soit égale à 0. Donc la suite ne converge pas dans $\mathcal{T}_{d'}$, et $\mathcal{T}_d \not\supset \mathcal{T}_{d'}$. $\square$

Exercice 3. Considérer les topologies suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{T}_1$ = la topologie standard;
- $\mathcal{T}_2$ = la topologie de $\mathbb{R}_K$, dont une base est donnée par les intervalles ouverts ordinaires et les $]a, b[\setminus K$ où a, $b \in \mathbb{R}$ et $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;
- $\mathcal{T}_3$ = la topologie du complément fini où $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert ssi $U = \varnothing$ ou $\mathbb{R} \setminus U$ est fini;
- $\mathcal{T}_4$ = la topologie de la limite supérieure, avec les intervalles $]a, b]$ comme base;
- $\mathcal{T}_5$ = la topologie avec tous les intervalles $]-\infty, a[$ comme base.

Pour chacune, déterminer lesquelles des autres topologies elle contient.

Solution. Le diagrame suivant exprime les (seules!) inclusions que on a entre les topologies données.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}_4 & \\
& \mathcal{T}_2 \arrow[u, hook] & \\
& \mathcal{T}_1 \arrow[u, hook] & \\
\mathcal{T}_3 \arrow[ur, hook] & & \mathcal{T}_5 \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}$$

On va le montrer.

- $[\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1]$: pour $x_1 < \cdots < x_n \in \mathbb{R}$ on peut écrir

$$\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty);$$

- $[\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4]$: puisque $\mathbb{R} \setminus K = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on peut écrir

$$(a, b) \setminus K = ((\bigcup_{n=0}^{+\infty} (-n, 0]) \cup (\bigcup_{n,m=0}^{+\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - \frac{1}{mn}]) \cup (\bigcup_{n=0}^{+\infty} (1, n])) \cap (\bigcup_{n=0}^{+\infty} (a, b - \frac{1}{n}]),$$

ce qui est ouvert dans $\mathcal{T}_4$;

- $[\mathcal{T}_4 \not\subset \mathcal{T}_2]$: tout ouvert de $\mathcal{T}_4$ qui contient -1 doit contenir $(-1, -1+\varepsilon)$ pour quelque $\varepsilon > 0$. Donc $(-2, -1]$ n'est pas ouvert;
- $[\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1]$; tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ qui contient 0 doit contenir $(0, \varepsilon)$ pour quelque $\varepsilon > 0$. Donc $(-1, 1) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas ouvert;
- $[\mathcal{T}_3 \not\subset \mathcal{T}_5]$: c'est claire;
- $[\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_3]$: c'est claire.

Exercice 4. Pour un ensemble X, montrer que les

$$M^{\uparrow} = \uparrow\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$. De même, pour un ensemble partiellement ordonné P, montrer que les

$$\uparrow p := \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P.

Preuve.

- Nous allons montrer que les

  $$M^{\uparrow} = \uparrow\mathcal{F}_X\{M\} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Flt}(X) \mid M \in \mathcal{F}\}$$

  avec $M \subseteq X$ forment une base de topologie sur $\mathrm{Flt}(X)$.
  Le filtre $\mathcal{F}_X\{X\}$ est le filtre trivial $\{X\}$ qui est le filtre minimal pour l'inclusion. Par conséquent, $X^{\uparrow} = \mathrm{Flt}(X)$ et donc tout filtre appartient à un ouvert de base.
  Vérifions maintenant la seconde condition. Soient $M_1, M_2 \subseteq X$, et montrons que

  $$(M_1 \cap M_2)^{\uparrow} = M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}.$$

  Soit $\mathcal{F} \in (M_1 \cap M_2)^{\uparrow}$. Alors par définition, $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un filtre et donc clos par extension, $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F} \in M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}$. Supposons que $\mathcal{F} \in M_1^{\uparrow} \cap M_2^{\uparrow}$. Alors $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est clos par intersection finies.
- Puisque pour tout $x \in P$, $x \leqslant x$, on a toujours que $x \in \uparrow x$, et donc tout $x \in P$ appartient à un ouvert de base.
  Soient $z \in \uparrow x \cap \uparrow y$ avec $x, y, z \in P$. Alors par transitivité de l'ordre, $\uparrow z \subseteq \uparrow x \cap \uparrow y$, ce qui conclut la preuve que les

  $$\uparrow p = \{x \in P \mid p \leqslant x\}$$

  avec $p \in P$ forment une base de topologie sur P. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 4

Exercice 1. Pour un espace métrique (X, d), $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que la boule fermée

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

est vraiment fermée dans X et montrer qu'elle inclut l'adhérence de la boule ouverte

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Donner un exemple où cette inclusion $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \overline{B}(x, \varepsilon)$ est stricte.

Preuve. On va montrer que le complementaire de toute boule fermée est ouvert. Soient $y \in X$ et $r > 0$, et $x \notin \overline{B}(y, r)$. Alors $B(x, d(x, y) - r) \subseteq X \setminus \overline{B}(y, r)$. En effet, si $z \in B(x, d(x, y) - r)$, alors on a

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < d(y, z) + (d(x, y) - r),$$

d'où on obtient $d(y, z) > r$, ce qui donne $z \in X \setminus \overline{B}(y, r)$. Puisque $\overline{B}(y, r)$ est fermé et il contient $B(y, r)$, on a $\overline{B(y, r)} \subseteq \overline{B}(y, r)$.

Si on considère $\{a, b\}$ comment un ensemble avec la métrique dicrète, alors

$$\overline{B(a, 1)} = \overline{\{a\}} = \{a\},$$

mais $\overline{B}(a, 1) = \{a, b\}$, et donc l'inclusion est stricte. □

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$ et $\{M_i\}_{i \in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les égalités suivantes sont satisfaites. Dans les cas contraires, déterminer laquelle des inclusions "$\subset$" ou "$\supset$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

(a) si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \overline{N}$;
(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;
(c) $\bigcup_{i \in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$;
(d) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$;
(e) $\bigcap_{i \in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} M_i}$;
(f) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

Solution. (a) OUI; si $M \subseteq N$, alors $\overline{N}$ est un fermé qui contient M. Donc il faut qu'il contienne aussi $\overline{M}$.

(b) OUI; $\overline{M} \cup \overline{N}$ est un fermé qui contient $M \cup N$. Donc il contient $\overline{M \cup N}$; de l'autre côté, $\overline{M \cup N}$ est un fermé qui contient M et N, donc $\overline{M}, \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$, et ensuite $\overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$.

(c) NON; le même argument que celui dans (b) marche pour l'inclusion $\bigcup_{i \in I} \overline{M_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$, mais l'autre n'est pas verifiée. Ca suffit de considérer la collection $A_n := [0, 1 - \frac{1}{n}]$, avec la topologie éuclideenne; alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = [0, 1)$, cependant que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$.

(d) NON; comme $\overline{M} \cap \overline{N}$ est un fermé qui contient $M \cap N$, on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pourtant l'autre n'est pas verifiée. Par example, on peut considérer $M := [0, 1)$ et $N := [1, 2]$, avec la topologie éuclideenne. Alors $\overline{M \cap N} = \varnothing$, mais $\overline{M} \cap \overline{N} = \{1\}$.

(e) NON; l'inclusion $[\supseteq]$ marche comment dans le cas de l'intersection finie, mais comment on vu dans (d) l'autre inclusion n'est verifié pas même dans le cas fini.

(f) NON; si on prend $A := [0, 1]$ et $B := \{1\}$, avec la topologie standard. Alors $\overline{A \setminus B} = [0, 1]$, mais $\overline{A} \setminus \overline{B} = [0, 1)$. Par contre, c'est vrai que $\overline{A \setminus B} \supseteq \overline{A} \setminus \overline{B}$. Soit $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$. En particulier il y a un voisinage V de x qui n'intersecte pas B. Si ensuite on prend un voisinage U de x, on a que $U \cap V$ l'est aussi, et donc il intersecte A. Chaque $z \in U \cap V \cap A$ n'est pas un élément de B, ce qui veut dire $z \in U \cap (A \setminus B)$. On a montré que tout voisinage de x intersecte $A \setminus B$, et donc on a la thèse. □

Exercice 3. Considérons $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ fixés et où $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie standard. Déterminer l'adhérence de $L \cap \mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Solution. On rappelle que lorsque la topologie sur X est engendrée par une base, $x \in \bar{A} \subseteq X$ si et seulement si pour tout ouvert de base U avec $x \in U$, $U \cap A \neq \varnothing$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa distance euclidienne standard $d(x,y) = ((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$, et de la base de la topologie standard de $\mathbb{R}^2$ associée à cette distance.

Si $a=b=0$ alors $L = \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}^2$ tel que $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1,2$. Alors $d(x,q) < \varepsilon$ et donc $B(x,\varepsilon) \cap (L \cap \mathbb{Q}^2) \neq \varnothing$. Par conséquent, $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$.

Si $b=0$ et $a \neq 0$ alors $L = \{0\} \times \mathbb{R}$ et donc par un arguement similaire on obtient que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Si $b \neq 0$, la réponse dépend de la pente de la droite $p = -\frac{a}{b}$.

Si $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si $x \in L$ est tel que $x_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $x_2 \notin \mathbb{Q}$, (car sinon $p = \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Q}$) et donc $L \cap \mathbb{Q}^2 = \{0\}$, ce qui implique que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = \{0\}$.

Si $p \in \mathbb{Q}$ alors pour tout $x \in L$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q_1 \in \mathbb{Q}$ avec $|x_1 - q_1| < \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2|p|+2})$. Alors $q = (q_1, pq_1) \in L \cap \mathbb{Q}^2$ and $d(x,q) < (\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Par conséquent, $B(x,\varepsilon) \cap L \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$ et donc $L \subseteq \overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que L est fermé et donc contient $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2}$. On a donc montré que $\overline{L \cap \mathbb{Q}^2} = L$. □

Exercice 4. Soit X un ensemble totalement ordonné et définissons la *topologie d'ordre* sur X, ayant tous les

$$]x,\infty[:= \{y \in X \mid x < y\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty, x[:= \{y \in X \mid y < x\}$$

(avec $x \in X$) comme sous-base. Montrer que

(a) les intervalles de la forme $]x,y[:= \{z \in X \mid x < z < y\}$ sont ouverts et les intervalles de la forme $[x,y] := \{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ sont fermés;

(b) Si X possède un élément minimal m, les intervalles de la forme $[m,x[$ sont ouverts et da la même façon, si X possède un élément maximal M, les intervalles de la forme $]x,M]$ sont ouverts.

Soit maintenant $X := I^2 = [0,1] \times [0,1]$, muni de la topologie d'ordre lexicographique. Déterminer les adhérences des sous-ensembles suivants de I^2:

$A = \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$B = \{(1-1/n, 1/2) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$,

$C =]0,1[\times \{0\}$,

$D =]0,1[\times \{1/2\}$,

$E = \{1/2\} \times]0,1[$.

Solution. (a) Il suffit de vérifier que puisque l'ordre est total, $]x,y[=]-\infty,y] \cap [x,\infty[$ et $X \setminus [x,y] =]-\infty,x[\cup]y,\infty[$.

(b) Il suffit de remarquer que $[m,x[=]-\infty,x[$ quand m est minimal et que $]x,M] =]x,\infty[$ lorsque M est maximal.

(c) La première chose à remarquer est que les $]x, y[, [(0,0), x[$ et $]x, (1,1)]$ forment une base de la topologie sur X, car toute intersection finie non vide d'ouvert de sous base est de cette forme. Pour éviter la redondance du calcul de l'adhérence des ensembles A à D, on regroupe certains arguments en resolvant le problème pour $F = S \times \{z\}$ avec $S \subseteq I$ et $z \in I$. Pour tout $x \notin S \times \{z\}$, on a soit $x_1 \notin S$, soit $x_2 \neq z$.

Si $x_2 \neq z$, et $x_2 \neq 0, 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ est contenu dans $[0,1] \setminus \{z\}$. Par conséquent $](x_1, x_2 - \varepsilon), (x_1, x_2 + \varepsilon)[$ est un ouvert qui contient x et qui n'intersecte pas F, et donc $x \notin \bar{F}$.

Si $x_1 \notin S$ et $x_2 \neq 0, 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ est contenu dans $[0,1]$. Alors $](x_1, x_2 - \varepsilon), (x_1, x_2 + \varepsilon)[$ est un ouvert qui contient x et qui n'intersecte pas F, et donc $x \notin \bar{F}$.

Nous avons donc montré que $\bar{F} \subseteq F \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.

Supposons $x \notin F$.

- Si $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$, alors $x \notin \bar{F}$ si et seulement s'il existe $0 \leqslant a < x$ tel que $]a, x_1[\cap S = \varnothing$. En effet, si l'hypothèse est vérifiée, choisissons $\varepsilon = 1$ si $z = 0$ et $0 < \varepsilon < z$ si $z > 0$. Alors $](a,1), (x_1, \varepsilon)[\cap F = \varnothing$ et $x \notin \bar{F}$. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors pour tout $]y, w[$ contenant x, il existe $t \in]y_1, x_1[\cap S$ et alors $y < (t, z) < x$. Par conséquent, $]y, w[\cap E \neq \varnothing$, et donc $x \in \bar{E}$.
- Si $x_2 = 1$, $x_1 \neq 1$, alors $x \notin \bar{E}$ si et seulement s'il existe $x < a \leqslant 1$ tel que $]x_1, a[\cap S = \varnothing$. En effet, si l'hypothèse est vérifiée, choisissons $\varepsilon = 0$ si $z = 1$ et $z < \varepsilon < 1$ si $z > 0$. Alors $](x_1, \varepsilon), (a, 0)[\cap E = \varnothing$ et $x \notin \bar{E}$. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors pour tout $]y, w[$ contenant x, il existe $t \in]x_1, w_1[\cap S$ et alors $x < (t, z) < w$. Par conséquent, $]y, w[\cap E \neq \varnothing$, et donc $x \in \bar{E}$.

On remarque aussi que si $(0,0), (1,1)$ ne sont jamais dans $\bar{E} \setminus E$.

En appliquant le critère précédent, on obtient que

$$\bar{A} = A \cup \{(0,1)\},$$
$$\bar{B} = B \cup \{(1,0)\},$$
$$\bar{C} = C \cup \{(x,1) : 0 \leqslant x < 1\} \cup \{(1,0)\},$$
$$\bar{D} = D \cup \{(x,0) : 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(x,1) : 0 \leqslant x < 1\}.$$

Il est relativement aisé de voir que $\bar{E} = \{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 5

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit T_1 ssi tous les singletons $\{x\} \subseteq X$ sont fermés.

Exercice 1. Montrer qu'un espace fini et T_1 est discret et que tout espace de Hausdorff est T_1.

Preuve. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un espace topologique qui satisfait l'axiome T_1. Alors pour tous $i = 1, \ldots n$ on a que le singleton $\{x_i\} = \bigcap_{j \neq i} X \setminus \{x_j\}$, ce qui est ouvert. Donc la topologie est discrète.

Soit maintenant X un espace topologique d'Hausdorff. On va montrer qu'il satisfait l'axiome T_1. Soit $x \in X$, et y dans le complementaire $X \setminus \{x\}$. Alors $x \neq y$, et on trouve deux ouverts disjoints U et V tel que $x \in U$, $y \in V$. En particulier $y \in V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus \{x\}$. □

Exercice 2. Considérer les cinq topologies sur $\mathbb{R}$ de la semaine passée.

(a) Pour chacune des topologies, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

(b) Lesquelles de ces topologies satisfont-elles l'axiome de Hausdorff? Et l'axiome T_1?

Solution.

- On va calculer l'adhérence de K dans chaque cas.
  (a) $\overline{K}^{\mathcal{T}_1} = K \cup \{0\}$; en effet chaque voisinage de 0 doit intersecter K, et pourtant pour tout $x \notin K \cup \{0\}$ on trouve un interval ouvert qui n'intersecte pas K.
  (b) $\overline{K}^{\mathcal{T}_2} = K$; en effet, par définition K est fermé.
  (c) $\overline{K}^{\mathcal{T}_3} = \mathbb{R}$; en effet, l'adhérence de K doit être un fermé infini, donc il est necessairement $\mathbb{R}$.
  (d) $\overline{K}^{\mathcal{T}_4} = K$; lorsque $\mathcal{T}_4$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ et K est fermé dans $\mathcal{T}_2$, il l'est aussi dans $\mathcal{T}_4$.
  (e) $\overline{K}^{\mathcal{T}_5} = [0, +\infty)$; en effet, $[0, +\infty)$ est fermé et il contient K. Donc on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pour l'autre, ca suffit de remarquer que pour tout $y \geq 0$ les voisinages contient un interval de la forme d'un ouvert de base, qui doit nécessairement intersecter K.
- On va dire, pour toutes les topologie, s'elles satisfont l'axiome T_1 et/ou sont d'Hausdorff.
  (a) $\mathcal{T}_1$ est d'Hausdorff; en effet la topologie est métrisable.
  (b) $\mathcal{T}_2$ est d'Hausdorff; en effet elle est plus fine que $\mathcal{T}_1$.
  (c) $\mathcal{T}_3$ satisfait l'axiome T_1, mais elle n'est pas d'Hausdorff; en effet, pour tous $x \neq y$ $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ est un voisinage de x qui ne contient pas y. Mais l'intersection de deux ouverts n'est jamais vide.
  (d) $\mathcal{T}_2$ est d'Hausdorff; en effet elle est plus fine que $\mathcal{T}_1$.
  (e) $\mathcal{T}_5$ ne satisfait pas l'axiome T_1; en effet, tous voisinage de 1 doit contenir 0. □

Exercice 3. Pour un espace topologique métrisable $(X, \mathcal{T})$ et $M \subseteq X$ montrer que $x \in \overline{M}$ si et seulement si on y trouve une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x (dans X).
Indication: La direction "$\Leftarrow$" est juste dans un espace topologique quelconque (pas forcément métrisable).

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui converge vers x. Par définition, pour tout ouvert U tel que $x \in U$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n > N$. Par conséquent, $x_{N+1} \in U \cap M$ qui est donc non vide. Par conséquent, x est dans l'adhérence de M.

Supposons maintenant que $x \in \bar{M}$ et soit $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une distance qui engendre la topologie sur X (X est métrisable). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition que $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap M \neq \varnothing$ et donc on peut choisir $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap M$. Ceci veut dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est telle que $x_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n > M$, $d(x_n, x) < \varepsilon$ et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Exercice 4. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

(a) tout point limite d'un filtre est aussi un point d'accumulation;

(b) pour un ultrafiltre, la réciproque est aussi juste;

(c) X est de Hausdorff si et seulement si tout filtre converge au plus vers un point;

(d) pour tout sous-ensemble $M \subseteq X$ et $x \in X$ on a $x \in \overline{M}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur M avec $\mathcal{F} \to x$ (dans X).

Preuve.

(a) Soit x est un point limite d'un filtre propre $\mathcal{F}$ et U est un voisinage ouvert de x. On a que $U \in \mathcal{F}$ et donc pour tout $A \in \mathcal{F}$, $U \cap A \in \mathcal{F}$ est non vide puisque $\mathcal{F}$ est propre. Ceci montre que x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$.

(b) Soit x un point d'accumulation d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et V un voisinage ouvert de x. Puisque $V \cup (X \setminus V) = X \in \mathcal{U}$, on a que $V \in \mathcal{U}$ ou bien $X \setminus V \in \mathcal{U}$. Mais la deuxième possibilité est absurde puisque alors $V \cap X \setminus V \neq \varnothing$. Par conséquent, $V \in \mathcal{U}$ et donc x est un point limite de $\mathcal{U}$.

(c) Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux filtres et définissons $S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}'\}$. On remarque que $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \mathcal{F}_X(S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'})$ est propre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $B \in \mathcal{F}'$, $A \cap B \neq \varnothing$ (autrement dit $S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ est une base de filtre).

Par ailleurs, si $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ alors $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, autrement dit $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est le plus petit filtre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

On remarque que par définition, un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x s'il contient le filtre des voisinage de x, $\mathcal{V}(x)$. Par conséquent, $\sup(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y))$ est le plus petit filtre qui converge à la fois vers x et y (Un filtre non propre converge vers tout les points).

On a alors que tout filtre propre converge au plus vers un point si et seulement si pour tout $x \neq y$, $\sup(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y))$ n'est pas propre.

La dernière condition est équivalente au fait que X est Hausdorff.

(d) Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, on peut définir $\mathcal{F}|_M = \{A \cap M : A \in \mathcal{F}\}$. On remarque que c'est un filtre sur M qui est propre si $A \cap M \neq \varnothing$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. En effet, la propriété de clôture par intersection finie découle de celle de $\mathcal{F}$ et si $A \cap M \subseteq B \subseteq M$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$ et donc $B = (A \cap M) \cup (B \cap M) = (A \cup B) \cap M \in \mathcal{F}|_M$.

Par ailleurs, si $\mathcal{G}$ est un filtre sur M, alors on remarque que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_X(\mathcal{G})$ si et seulement si $\mathcal{F}|_M \subseteq \mathcal{G}$.

En effet, si $A \cap M \in \mathcal{G}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$, alors $A \cap M \subseteq A$ et donc $A \in \mathcal{F}_X(\mathcal{G})$.

Par ailleurs, si pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe $B \in \mathcal{G}$ avec $B \subseteq A$, alors $B \subseteq A \cap M$ et donc $A \cap M \in \mathcal{G}$.

L'existence d'un filtre propre $\mathcal{G}$ sur M convergeant vers x et donc équivalente à l'existence d'un filtre propre $\mathcal{G}$ sur M avec $\mathcal{V}(x)|_M \subseteq \mathcal{G}$. Ce dernier point est équivalent au fait que $\mathcal{V}(x)|_M$ est propre, c'est-à-dire que $V \cap M \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. Cette dernière propriété est équivalente au fait que $x \in \bar{M}$. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 6

Exercice 1. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Prouver que f est continue si et seulement si elle est continue au sens ε-δ:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall x' \in X\colon d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Preuve. On remarque d'abord que la condition au-dessus est equivalente à la suivante:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon).$$

[$\Longrightarrow$] Puisque f est continue, on a que pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la préimage de la boule ouverte $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq Y$ est ouverte et elle contient x. En particulier, on a qu'il existe une boule ouvert dans X de la forme $B_X(x, \delta)$ tel que $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$, et donc $f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$.

[$\Longleftarrow$] Soit $U \subseteq Y$ un ouvert, tel que $f^{-1}(U)$ n'est pas vide. On va montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Puisque U est ouvert et il contient $f(x)$, il y a une boule $B_Y(f(x), \varepsilon)$ qui est contenue dans U. En utilisant l'hypothèse on obtient $\delta > 0$ tel que $f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$, et donc $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$. Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert. $\square$

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

(a) Montrer que $(Y, \mathcal{T}')$ est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

(b) Pour $(Y, \mathcal{T}')$ de Hausdorff, $D \subseteq X$ dense (par rapport à $\mathcal{T}$) et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Preuve.

(a) [$\Longrightarrow$] On va montrer que si Y est d'Hausdorff, alors le complementaire de la diagonale est ouvert. Soit $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors $x \neq y$ e lorsque Y est d'Haudorff il y a deux ouverts disjoints U et V qui contiennent respectivement x et y. Alors $U \times V$ est ouvert dans $Y \times Y$, il contient (x, y) et il n'intersecte pas la diagonale.

[$\Longleftarrow$] Soit $x \neq y$ dans Y. Ca veut dire que $(x, y) \notin \Delta_Y$. Alors il y a un ouvert de base de $Y \times Y$ qui contient (x, y) et qui n'intersecte pas la diagonale. Cela signifie que $(x, y) \in U \times V \subseteq Y \times Y \setminus \Delta_Y$, pour quelques ouverts U et V dans Y. En particulier, on deduit que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$.

(b) On va montrer que $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = X$. Si on definit $h\colon X \longrightarrow Y \times Y$ par $h(x) := (f(x), g(x))$, alors cette application est continue parce que ses projections f et g le sont. Ensuite, $E = h^{-1}(\Delta)$, qui est fermé comme h est continue et Y est d'Hausdorff. Par ailleurs $E \supseteq D$. Donc on a $E = \overline{E} \supseteq \overline{D} = X$. $\square$

Exercice 3. Soient Y un ensemble totalement ordonné (muni de la topologie d'ordre), $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et f, $g\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ deux applications continues. Montrer que

(a) $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\} \subseteq X$ est fermé;

(b) l'application minimum $\min\colon (Y \times Y, \mathcal{T}_< * \mathcal{T}_<) \to (Y, \mathcal{T}_<)$ est continue.
Indication: Lemme de Recollement.

Preuve.

(a) On note $A = \{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\}$. Soient $x \in X$ avec $f(x) > g(x)$. On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x avec $U \subseteq (X \setminus A)$. On distingue deux cas.

- S'il existe $z \in]g(x), f(x)[$, alors on définit $U = g^{-1}] - \infty, z[\cap f^{-1}]z, +\infty[$. Le sous-ensemble U est ouvert puisque f et g sont continues. De plus, si $y \in U$ alors $g(y) < z < f(y)$ et donc $y \in X \setminus A$. Il est évident que $x \in U$.
- Si $]g(x), f(x)[= \varnothing$, alors on définit $U = g^{-1}] - \infty, f(x)[\cap f^{-1}]g(x), +\infty[$. Pour les mêmes raisons que précédemment, U est un voisnage ouvert de x. De plus, si $y \in U$ alors $g(y) < f(x)$ et donc puisque $]g(x), f(x)[= \varnothing$, on a que $g(x) \geqslant g(y)$. De même, on obtient que $f(y) \geqslant f(x)$. Puisque $f(x) > g(x)$, par transitivité on obtient que $y \in X \setminus A$.

Ceci montre que le complémentaire de A est ouvert et donc que A est fermé.

(b) On pose $A_0 = \{(x, y) \in Y \times Y : x \leqslant y\}$ et $A_1 = \{(x, y) \in Y \times Y : y \leqslant x\}$. Ce sont des fermés par le point précédent appliqué aux projections $\pi_1, \pi_2 : Y \times Y \longrightarrow Y$. On remarque que $\min|_{A_0} = \pi_1|_{A_0}$ et $\min|_{A_1} = \pi_2|_{A_1}$ et donc celles-ci sont continues (par restriction du domaine). On a que $A_1 \cup A_2 = Y$ car l'ordre sur Y est total. Par le lemme de recollement, il suffit de montrer que ces deux applications coincident sur $A_1 \cap A_0$, ce qui est évident. $\square$

Définition. Pour une application d'ensembles $f \colon X \to Y$ et un filtre $\mathcal{F}$ sur X on définit *l'image directe* de $\mathcal{F}$ par f

$$f_*\mathcal{F} := \mathcal{F}_Y \{fA \mid A \in \mathcal{F}\} \overset{(*)}{=} \left\{B \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}B \in \mathcal{F}\right\}$$

comme le filtre engendré par les images directes des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 4. Soit $f \colon X \to Y$ une application quelconque.

(a) Montrer l'égalité $(*)$ ci-dessus et conclure que l'image directe $f_*\mathcal{F}$ d'un filtre propre $\mathcal{F}$ est de nouveau propre.
Indication: Les fA avec $A \in \mathcal{F}$ forment une base de filtre.

Maintenant suppose que X et Y sont de plus munis de topologies et $x \in X$. Montrer que

(b) si f est continue et x un point d'accumulation d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X alors fx est un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$;

(c) f est continue en x si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F} \to x$ implique $f_*\mathcal{F} \to fx$.

Solution.

(a) Soient $A, B \in \mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}$ un filtre propre. On a que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et puisque $\mathcal{F}$ est propre, l'ensemble $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre. Ceci montre que $f_*\mathcal{F}$ est un filtre propre.
On montre l'égalité $(*)$. Soit $\mathcal{G} = \{B \subseteq Y : f^{-1}B \in \mathcal{F}\}$ et soit $Z \in \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$. Ceci veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ avec $f(A) \subseteq Z$ (puisque les $f(A)$ forment une base de filtre).
Or, $A \subseteq f^{-1}f(A) \subseteq f^{-1}Z$ donc on a que $f^{-1}Z \in \mathcal{F}$, et ainsi $Z \in \mathcal{G}$. Si $B \subseteq Y$ est tel que $f^{-1}B \in \mathcal{F}$, alors $ff^{-1}B \subseteq B$ et donc $B \in \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$.
On a donc montré que $\mathcal{G} = \mathcal{F}_Y(\{f(A) : A \in \mathcal{F}\})$.

(b) Soit U un ouvert qui contient $f(x)$ et $B \in f_*\mathcal{F}$. Puisque f est continue en $x \in X$, on a l'existence d'un voisinage ouvert $x \in V$ tel que $f(V) \subseteq U$. Or $V \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$ puisque x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$.

Puisque $f(V \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(V) \cap ff^{-1}B \subseteq U \cap B$, $U \cap B$ est non vide.

(c) Il est clair que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, alors $f_*\mathcal{F} \subseteq f_*\mathcal{F}'$. On a donc que $\mathcal{F} \longrightarrow x \Rightarrow f_*\mathcal{F} \longrightarrow f(x)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X si et seulement si $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f_*(\mathcal{V}(x))$.

On a va donc montrer que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f_*(\mathcal{V}(x))$ si et seulement si f continue en x. On commence par le sens direct.

Soit U un voisinage ouvert de $f(x)$. Par hypothese, $f^{-1}U \in \mathcal{V}(x)$, et donc $f^{-1}U$ contient un voisinage ouvert de x. Ceci montre que f est continue en x.

Supposons que f est continue en x, et soit $A \in \mathcal{V}(f(x))$. Alors A contient un voisinage ouvert V de $f(x)$. Par hypothèse, $f^{-1}V$ contient un voisinage ouvert de x, c'est à dire $V \in f_*(\mathcal{V}(x))$. Par conséquent, $A \in f_*(\mathcal{V}(x))$. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 7

Exercice 1. Montrer que

(a) tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff;

(b) tout produit de deux espaces de Hausdorff est de Hausdorff;

(c) si $(Y, \mathcal{T}')$ est un espace de Hausdorff et $f\colon (X, \mathcal{T}) \hookrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est une injection continue alors $(X, \mathcal{T})$ est aussi de Hausdorff.

Preuve.

(a) Soit X un espace d'Hausdorff, et $Y \subseteq X$ un sous-espace. On va montrer que Y est d'Hausdorff aussi. Soient y et y' deux points divers de Y. En particulier on peut les séparer dans X par deux ouverts disjoints U et U' qui contiennent réspectivement y et y'. Maintenant $U \cap Y$ et $U' \cap Y$ sont ouverts disjoints dans Y, et ils contiennent encore y et y'.

(b) Soient X et Y deus espaces d'Hausdorff. On va montrer que $X \times Y$ est d'Hausdorff aussi. Soient (x, y) et (x', y') deux poiints divers de $X \times Y$. En particulier $x \neq x'$ ou $y \neq y'$. Supposons que $x \neq x'$, et soient U, U' deux ouverts disjoints dans X qui contiennent réspectivement x, x'. Alors on a que $U \times Y$ et $U' \times Y$ sont ouverts dans $X \times Y$, ils sont disjoints et ils contiennent réspectivement (x, y) et (x', y').

(c) On va montrer que X est d'Hausdorff. Soient x et x' deux points divers de X. Comme i est injective, $i(x) \neq i(x')$, et on peut donc les séparer dans Y par deux ouverts disjoints U et U' qui contiennent réspectivement $i(x)$ et $i(x')$. Ensuite $i^{-1}(U)$ et $i^{-1}(U')$ sont deux ouverts disjoints qui séparent x et x' dans X. □

Exercice 2. Les mêmes énoncés que dans 1(a) et (b) mais avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff". Trouver un contrexemple pour l'énoncé 1(c) avec "métrisable" en lieu de "Hausdorff".

Preuve.

(a) Soit (X, d_X) un espace métrique, et $Y \subseteq X$ un sous-espace. On va montrer que Y est métrisable. On définit $d_Y : Y \times Y \longrightarrow [0, +\infty)$ par réstriction of d_X. Alors c'est clair que les axiomes de m'etrique sont toujours satisfaits. Il faut qu'on montre que la topologie induite sur Y par d_Y est en effet la topologie de sous-espace $\mathcal{T}_Y$.

- $[\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{d_Y}]$; Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Alors $U = Y \cap V$ pour quelque $V \in \mathcal{T}_X$. Soit maintenant $y \in U$. Alors il y a une boule $B_X(y, r)$ qui est contenue dans V, et ensuite $B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y$ est contenue dans U. Donc U est ouvert dans $\mathcal{T}_{d_Y}$.
- $[\mathcal{T}_{d_Y} \subseteq \mathcal{T}_Y]$; Chaque boule ouvert $d_Y(y, r)$ est en effet égal à $Y \cap B_X(y, r)$, ce qui est ouvert dans $\mathcal{T}_Y$.

(b) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deus espaces métriques. On va montrer que $X \times Y$ est métrisable. On definit

$$d_{X \times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow [0, +\infty),$$

$$d_{X \times Y}((x, y)(x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

On va verifier que les axiomes de métrique sont valids.
Soients $(x, y)(x', y'), (x'', y'') \in X \times Y$.

- Positivité:

$$d_{X\times Y}((x,y)(x',y')) = 0 \iff d_X(x,x') + d_Y(y,y') = 0 \iff$$
$$\iff d_X(x,x') = 0 \text{ et } d_Y(y,y') = 0 \iff x = x' \text{ et } y = y' \iff (x,y) = (x',y').$$

- Symmétrie: claire.
- Inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}((x,y)(x'',y'')) &:= d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') \leq \\ &\leq (d_X(x,x') + d_X(x',x'')) + (d_Y(y,y') + d_Y(y',y'')) = \\ &= d_{X\times Y}((x,y)(x',y')) + d_{X\times Y}((x',y')(x'',y'')). \end{aligned}$$

Donc $d_{X\times Y}$ est bien une métrique. Il faut qu'on montre que la topologie induite sur $X\times Y$ par $d_{X\times Y}$ est en effet la topologie produit $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

- $[\mathcal{T}_{X\times Y} \subseteq \mathcal{T}_{d_{X\times Y}}]$; Un base pour la topologie produit est donnée par les produits d'une boule overte de X et une boule ouvertede Y. Soient $B_X(x,r)$ et $B_Y(y,s)$ deux boule ouvertes de X et Y réspectivement. On va montrer que $B_X(x,r)\times B_Y(y,s)$ est ouvert dans $\mathcal{T}_{d_{X\times Y}}$. Soit $(x,y) \in B_X(x,r)\times B_Y(y,s)$. Alors

$$B_{X\times Y}((x,y), \min\{r,s\}) \subseteq B_X(x,r)\times B_Y(y,s).$$

- $[\mathcal{T}_{d_{X\times Y}} \subseteq \mathcal{T}_{X\times Y}]$; Soit $B_{X\times Y}((x,y),r)$ une boule ouverte de $X\times Y$. On va monter qu'elle est ouverte dans $\mathcal{T}_{X\times Y}$. Soit $(x,y) \in B_{X\times Y}((x,y),r)$. Alors

$$B_X(x,\frac{r}{2})\times B_Y(y,\frac{r}{2}) \subseteq B_{X\times Y}((x,y),r).$$

(c) Considérons la droite de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$ avec $\mathbb{R}$ comme ensemble sous-jacent et les intervalles de la forme $[a,b[$ comme base pour la topologie. On va montrer que $\mathbb{R}_l$ est *séparable* (i.e. il possède un sous-ensemble dénombrable et dense) mais n'a pas de base dénombrable. Une fois qu'on a montré ça, on utilise le lemme ci-dessous pour conclure que $\mathbb{R}_l$ n'est pas métrisable.

Après, parce que la topologie de $\mathbb{R}_l$ est plus fine que la topologie standard sur $\mathbb{R}$, l'application $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ est continue et bijective mais $\mathbb{R}$ est métrisable et $\mathbb{R}_l$ ne l'est pas.

- $\mathbb{R}_l$ est séparable parce que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_l$ est dense (tout intervalle $[a,b[$ contient un nombre rationnel).
- $\mathbb{R}_l$ n'a pas de base dénombrable parce que supposons qu'il y a une telle base $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sans perte de généralité, on a $B_n = [a_n, b_n[$ pour quelques a_n, $b_n \in \mathbb{R}_l$ parce qu'on peut toujours diminuer les ouverts d'une base. Mais maintenant il y a $x \in \mathbb{R}_l \setminus \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et donc l'ouvert $[x, x+1[$ ne contient aucun ouvert de base autour de x.

Lemme. Un espace métrisable X est séparable (i.e. possède un sous-ensemble dénombrable et dense) si et seulement s'il a une base dénombrable.

Preuve. Soit d une métrique sur X qui induit la topologie donnée et supposons qu'il y a $D \subseteq X$ dénombrable et dense. Alors les boules $B(d,\varepsilon)$ avec $d \in D$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ forment une base dénombrable pour la topologie de X. À savoir, si $U \subseteq X$ est ouvert et $x \in U$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $B(x,2\varepsilon) \subseteq U$ et parce que $D \subseteq X$ est dense, on trouve un $d \in D \cap B(x,\varepsilon)$. Donc aussi $x \in B(d,\varepsilon)$ et par l'inégalité du triangle $B(d,\varepsilon) \subseteq B(x,2\varepsilon) \subseteq U$. Par contre, si X a une base dénombrable $\mathcal{B}$, on utilise l'axiome du choix pour choisir un point $x_B \in B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Parce que $\mathcal{B}$ est une base dénombrable, l'ensemble des x_B est dénombrable et dense. □

Exercice 3. Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus spécifiquement, trouver une application $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et les $f|_{X_n}\colon (X_n,\mathcal{T}_{X_n}) \to (Y,\mathcal{T}')$ sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais f ne l'est pas.

Preuve. On considère $X = \mathbb{N}$ avec la topologie de complément fini et $Y = \mathbb{N}$ avec la topologie discrète, et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application identité. Il est clair que f n'est pas continue, car la topologie discrète est strictement plus fine que la topologie de complément fini.

On pose $X_n = \{n\}$, il est clair que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Par ailleurs, toute application constante est continue, et donc $f|_{X_n}$ est toujours continue. Ceci fournit le contre-exemple demandé. □

On se souvient qu'une application $(f_1, f_2)\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y \times Z, \mathcal{T}_Y * \mathcal{T}_Z)$ est continue si et seulement si $f_1\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ et $f_2\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$ sont continues. En reversant la situation, on se demande si un résultat analogue est juste pour une application $X \times Y \to Z$.

Exercice 4. Considérons $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $I := [0,1]$ comme sous-espaces de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement (munis des topologies standards) et définissons

$$f\colon (S^1 \times I, \mathcal{T}_{S^1} * \mathcal{T}_I) \to (S^1, \mathcal{T}_{S^1}),\ (e^{i2\pi\varphi}, t) \mapsto e^{i2\pi\varphi^t}$$

où $\varphi \in\ ]0,1]$ (et donc φ^t est bien-défini pour tout $t \in I$).

(a) Montrer que f est continue en chaque variable. Plus spécifiquement, ça veut dire que pour tout $z \in S^1$ et $t \in I$, les applications

$$f(z,-)\colon \begin{array}{ccc} (I,\mathcal{T}_I) & \to & (S^1,\mathcal{T}_{S^1}) \\ s & \mapsto & f(z,s) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f(-,t)\colon \begin{array}{ccc} (S^1,\mathcal{T}_{S^1}) & \to & (S^1,\mathcal{T}_{S^1}) \\ w & \mapsto & f(w,t) \end{array}$$

sont continues.

(b) L'application f, est-elle continue?

Preuve.

(a) On commence par montrer que $c\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{i2\pi t}$ est continue. En fait, par la propriété universelle du produit, il suffit de montrer qu'elle est continue composante par composante. Mais $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ et le cours de première année d'analyse permet de conclure que c est continue puisque les fonctions sinus et cosinus le sont. On peut maintenant restreindre le domaine à I et le codomaine à S^1 et la fonction est toujours continue.

On a donc montré que $q\colon I \longrightarrow S^1$ définie par $q(t) = e^{i2\pi t}$ est continue.

- Pour $z = e^{i2\pi\varphi}$, $\varphi > 0$ fixé, on remarque que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow I \\ s &\mapsto \varphi^s = e^{s\ln\varphi} \end{aligned}$$

est continue comme composition d'applications continues. Par conséquent, l'application $f(z,-) = q \circ g$ est aussi continue.

- On procède via le lemme de recollement. On pose

$$S^1 = \{(x,y) \in S^1 : y \geqslant 0\} \cup \{(x,y) \in S^1 : y \leqslant 0\}$$

et on montre que $f(-,t)$ est continue sur chacun des fermés. De la géométrie élémentaire (trigonométrie) montre que $d(q(x), q(y)) = 2\sin(\pi(x-y))$ lorsque $|x-y| \leqslant \frac{1}{2}$.

Une analyse de fonction appliqué à $2\sin(\pi(x-y)) - x$ montre que cette fonction est positive pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Ceci montre que $d(q(x), q(y)) > |x-y|$ lorsque $|x-y| < \frac{1}{2}$. Ainsi, $q : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \{(x,y) \in S^1 : y \geqslant 0\}$ est un homéomorphisme.
Pour t fixé, on remarque que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon]0,1/2] &\longrightarrow I \\ s &\mapsto s^t = e^{t\ln s} \end{aligned}$$

est continue comme composition d'applications continues, et elle tend vers 0 quand s converge vers 0. Par conséquent, on peut la prolonger par continuité par $g(0) = 0$ (les espaces sont métriques). Ainsi, $f(-,t) = q \circ g q^{-1}$ est continue lorsque restreinte à $\{(x,y) \in S^1 : y \geqslant 0\}$. Un raisonnement analogue montre la continuité sur l'autre fermé, et le lemme de recollement achève la preuve.

(b) On considère la suite $x_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n})$, qui converge vers $(0,0)$ dans $I \times I$. Puisque q est continue, $(e^{i2\pi\frac{1}{2^n}}, \frac{1}{n})$ converge vers $(1,0) = (q(0), 0)$ dans $S^1 \times I$. Mais

$$f(e^{i2\pi\frac{1}{2^n}}, \frac{1}{n}) = e^{i2\pi\frac{1}{2}} = -1$$

et donc cette suite ne converge pas vers $f(1,0) = 1$.
Ceci montre que f n'est pas continue. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 8

Exercice 1. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que

(a) si les X_i sont de Hausdorff, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est aussi de Hausdorff;

(b) $\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$;

(c) $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$.

Preuve.

(a) Soient x, y deux éléments distincts de $\prod_{i\in I} X_i$. Alors il existe $j \in I$ tel que $x(j) \neq y(j)$. Puisque X_j est de Hausdorff, il existe U, V deux ouverts disjoints de X_j avec $x(j) \in U$ et $y(j) \in V$. On définit les ouverts $W_x = \{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in U\}$ et $W_y = \{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in V\}$ (ils appartiennent à la sous-base de la topologie sur le produit).

Puisque U et V sont disjoints, W_x et W_y sont disjoints et on a que $x \in W_x$ et $y \in W_y$.

(b) Nous allons commencer par montrer que $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé dans $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$. Soit $x \notin \prod_{i\in I} \overline{M_i}$. Alors il existe $j \in I$ tel que $x(j) \notin \overline{M_j}$, c'est à dire il existe un ouvert U de X_j avec $x(j) \in U$ et $U \subseteq X_j \setminus M_j$. On remarque que l'ouvert de sous-base $\{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in U\}$ contient x et est inclus dans le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$.

Par conséquent, le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est ouvert et donc $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé. Or $\overline{\prod_{i\in I} M_i}$ est le plus petit fermé contenant $\prod_{i\in I} M_i$, et donc $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.

Pour l'inclusion inverse, nous allons utiliser la caractérisation de l'adhérence par les bases. Soit $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ et un ouvert de base W de la topologie produit qui contient x. Par définition, W est de la forme

$$W = \left\{ z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\},$$

où $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \dots, j_n \in I$ et $x(j_k) \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$ pour $k = 1, \dots n$.

Puisque $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$, alors pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in V_i \cap M_i$, où $V_i = X_i$ si $i \neq j_k$ et $V_{j_k} = U_{j_k}$. On définit y par $y(j) = y_j$ et on remarque que $y \in W \cap \prod_{i\in I} M_i$.

Ceci montre que $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \supseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.

(c) Nous allons démontrer que si $(X, \mathcal{T})$ admet une base $\mathcal{B}$ et $Y \subseteq X$ alors $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ est une base pour la topologie sur Y. Il est clair que tous les éléments de $\mathcal{B}_Y$ sont des ouverts de $(Y, \mathcal{T}_Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \subseteq \mathcal{T}_Y$. Par ailleurs, si $W \in \mathcal{T}_Y$, alors il existe un ouvert U de X tel que $W = U \cap Y$.

Alors, piusque $\mathcal{B}$ est une base, il existe des $B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ avec $U = \bigcup_{i\in I} B_i$.

On a que $W = (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \supseteq \mathcal{T}_Y$.

En appliquant le résultat à $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $Y = \prod_{i\in I} Y_i$, on obtient que la topologie $(*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ à pour base

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i : x(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\} \cap \prod_{i\in I} Y_i : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\} \\
&= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} Y_i : x(j_k) \in U_{j_k} \cap Y_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\} : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\}
\end{aligned}$$

et l'on remarque que cette base est exactement celle du produit $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i}$ □

Exercice 2. Pour une famille dénombrable $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques métrisables, montrer que leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est de nouveau métrisable. Trouver un exemple de famille indénombrable, dont le produit n'est plus métrisable.
Indication: Considérer les bases locales d'un point où on appelle base locale d'un point x une base pour le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x.

Preuve.

- On va montrer que le produit d'une famille dénombrable d'espaces métriques est métrisable. Soit (X_n, d_n) une famille d'éspaces métrique, avec chaque d_n bornée par 1. On définit alors une métrique sur $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ par
$$d_X : X \times X \longrightarrow [0, +\infty),$$
$$d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|d_n(x_n, y_n)|}{n} \leq 1.$$
d_X est bien une métrique. Les propriétés de symmétrie et réflexivité sont triviales. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que
$$\frac{|d_n(x_n, z_n)|}{n} \leq \frac{|d_n(x_n, y_n)|}{n} + \frac{|d_n(y_n, z_n)|}{n} \leq d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) + d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$
En passant au supremum on a l'inégalité voulue.
Ensuite, d_X induit la topologie produit.
  - $[\mathcal{T}_{d_X} \ll \mathcal{T}_X]$; soit V un ouvert de base dans la topologie induite par la métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Il y a une boule ouverte $B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon)$ qui est contenue dans V. Soit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Si $U := \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, oú $U_n := B_{X_n}(x_n, \varepsilon)$ pour $n \leq N$ et $U_n = X_n$ pour $n > N$, alors U est ouvert dans la topologie produit et $U \subseteq B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon)$ En particulier
  $$(x_n)_{n\in N} \in U \subseteq B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq V.$$
  Donc V est ouvert dans la topologie produit.
  - $[\mathcal{T}_X \ll \mathcal{T}_{d_X}]$; soit U un ouvert de base dans la topologie produit, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. Il y a un ouvert de base U' dans la topologie produit tel que $(x_n)_{n\in N} \in U' \subseteq U$. On peut prendre U' est de la forme $U' = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, où $U_n = B_{X_n}(x_n, \varepsilon_n)$ pour un nombre fini de n, et $U_n = X_n$ autrement. Si $\varepsilon := \min_n \frac{\varepsilon_n}{n}$, alors $B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq U'$. En particulier
  $$(x_n)_{n\in N} \in B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq U' \subseteq U.$$
  Donc U est ouvert dans la topologie induite par la métrique.
- En général le produit d'une famille d'éspaces métriques n'est pas métrisable. Soit $X_r := \{0, 1\}$ muni de la topologie discrète pour tout $r \in \mathbb{R}$. Alors chaque X_r est métrisable, tandis que le produit $X := \prod_{r\in\mathbb{R}} X_r$ ne l'est pas. En effet dans X on ne peut pas caractériser l'adhérence par suites (Exo3, série5).
Soient $O := (0)_{r\in\mathbb{R}}$, et $A := \{(x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in X \mid x_r = 0 \text{ pour un nombre fini de } r\}$. Alors $O \in \overline{A}$. Condidérons une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A et pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit $I_k := \{r \in \mathbb{R} \mid x^k_r = 0\} \subseteq \mathbb{R}$, ce qui est fini. Alors $I := \bigcup_{r\in\mathbb{R}} I_k$ est dénombrable, et donc il existe $z \in \mathbb{R} \setminus I$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x^k_z = 1$. En particulier la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être définitivement contenue dans l'ouvert $\{(x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in X \mid x_z = 0\}$, ce qui est un voisinage de O. Donc aucune suite dans A peut converger vers O. □

Exercice 3.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite (et où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard) n'est pas métrisable.
Indication: De nouveau, considérer les bases locales.

(b) Trouver un exemple d'une famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques et d'une application $f\colon (Y,\mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{box}})$ tels que chaque composante $f_i\colon (Y,\mathcal{T}) \to (X_i,\mathcal{T}_i)$ est continue mais f ne l'est pas.

Preuve.

(a) On va montrer que dans $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite on ne peut pas caractériser l'adhérence par suites (Exo3, série5).
Soient $O := (0)_{n\in\mathbb{N}}$, et

$$A := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n > 0 \text{ pour tout } n\}.$$

Alors $O \in \overline{A}$. Considérons après une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A. L'ouvert

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} (-x_n^n, x_n^n)$$

contient O mais aucun x^k (lorsque $x_k^k \notin (-x_k^k, x_k^k)$). En particulier, aucune suite dans A converge vers O.

(b) Soit $X_n := \{0,1\}$ avec la topologie discrète pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $Y := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec la topologie produit. Alors la fonction identité

$$Y = (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \star) \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \square)$$

n'est pas continue, puisque la topologie boite est strictement plus fine que la topologie produit. Pourtant les projections sont continues. $\square$

Exercice 4.

(a) Pour une application $f\colon X \to Y$ et un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur X, montrer que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur Y.

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques dont le produit $X := \prod_{i\in I} X_i$ est non-vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur $(X, \ast_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ et notons $\mathcal{F}_i := (\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{F}$ les images directes de $\mathcal{F}$ par les projections $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$. Pour chaque point $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, montrer que

(b) pour $f\colon Y \twoheadrightarrow Z$ une application surjective et $\mathcal{G}$ un filtre sur Y

$$f_*\mathcal{G} = \{fA \mid A \in \mathcal{G}\}$$

(en particulier $\mathcal{F}_i = \{\mathrm{pr}_i A \mid A \in \mathcal{F}\}$);

(c) $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si chaque $\mathcal{F}_i$ avec $i \in I$ converge vers x_i.

(d) Trouver un exemple concret de X et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de point d'accumulation mais où chaque $(\mathrm{pr}_i\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $i \in I$ en possède un.

Preuve.

(a) Nous avons montré dans une série précédente que $f_*\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$. Supposons que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et soient $B, B' \subseteq Y$ tels que $B \cup B' \in f_*\mathcal{F}$. Alors $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cup B') \in \mathcal{F}$ et donc puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ou bien $f^{-1}(B') \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $B \in f_*\mathcal{F}$ ou bien $B' \in f_*\mathcal{F}$. Ceci montre que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

(b) Supposons $f : Y \longrightarrow Z$ surjective et soit $B \subseteq Z$ tel que $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un filtre sur Y. Alors, par surjectivité de f, on a que $B = ff^{-1}(B)$ et donc $B \in \{f(A) : A \in \mathcal{G}\}$. Reciproquement, $A \subseteq f^{-1}f(A)$ et donc si $A \in \mathcal{G}$, alors $f(A) \in f_*\mathcal{G}$.

(c) Nous avons déja montré que si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et que $\mathcal{F} \to x$ alors $f_*\mathcal{F} \to f(x)$. Ceci montre le sens direct. Soit $x \in \prod_{i\in I} X_i$ et $\mathcal{F}$ un filtre sur le produit et supposons maintenant que $\mathcal{F}_i \to \mathrm{pr}_i(x) = x_i$ pour tout $i \in I$. On doit montrer que tout voisinage ouvert de x est un membre de $\mathcal{F}$. Par la propriété des filtres de stabilité par intersection finies et par extension, il suffit de montrer que les ouverts de sous-base contenant x sont des membres de $\mathcal{F}$.

Soit donc un ouvert de sous-base S de la topologie produit qui contient x. Par définition, S est de la forme

$$S = \left\{ z \in \prod_{i\in I} X_i : z_j \in U_j \right\},$$

où $x_j \in U_j$ et U_j est un ouvert de X_j.

Puisque $\mathcal{F}_j \to x_j$, on a que $U_j \in \mathcal{F}_j$ et donc que $S = \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F}$.

(d) Soit $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète. On remarque que le produit est lui aussi muni de la topologie discrète. Si $x \in X$ est un point d'accumulation d'une suite x_n à valeur dans X, ou X est un espace discret, si et seulement si $x_n = x$ pour un nombre infini de n.

On considère une bijection $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Clairement, x n'a pas de point d'adhérence lorsque on la voit comme une suite. Par contre, par surjectivité de x, $\mathrm{pr}_1(x)$ et $\mathrm{pr}_2(x)$ admettent tout entier comme un point d'accumulation. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 9

Exercice 1. Soit (Y, d) un espace métrique et X un ensemble. Montrer qu'une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $f\colon X \to Y$ si et seulement si elle converge vers f dans $(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho})$ où $\bar\rho$ est la métrique uniforme.

Preuve. [$\Longrightarrow$]; Supposons qu'on a une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une application $f\colon X \to Y$. Soit $B(f, \varepsilon)$ une boule dans $(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho})$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_Y(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $n > N$. Alors pour tou $n > N$ on a que

$$\bar\rho(f_n, f) = \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

ce qui veut dire que la suite est définitevement dans la boule, et donc elle converge vers f dans la topologie induite par la métrique.
[$\Longleftarrow$]; Supposons qu'on a une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho})$. Soit $\varepsilon > 0$; comme la suite converge vers f, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \in B(f, \varepsilon)$ lorsque $n > N$. En particulier, pour $n > N$ et $x \in X$ on a

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = \bar\rho(f_n, f) < \varepsilon.$$

Donc la suite converge uniformement vers f. □

Exercice 2. Trouver deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ et une application non continue $f\colon X \to Y$ tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergente vers un $x \in X$, la suite $(fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fx.

Solution. Soit X un ensemble. On le munit de la topologie dite codénombrable $\mathcal{T}_{coden}$, qui est définie par $U \in \mathcal{T}_{coden}$ si U est vide ou bien si son complémentaire est fini ou dénombrable. Soit $U_i, i \in I$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_{coden}$. Alors $X \setminus (\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} X \setminus U_i$ a un cardinal plus petit que celui de n'importe lequel des $X \setminus U_i$, il est donc bien au plus dénombrable.

Si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_{coden}$ alors $X \setminus \bigcap_{k=1}^n U_k = \bigcup_{i=1}^n X \setminus U_k$ qui est dénombrable car une union finie d'ensemble dénombrables est dénombrable.

La topologie codénombrable est donc bien une topologie.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie codénombrable, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x pour cette topologie. On considère l'ensemble $U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$ dont le complémentaire est au plus dénombrable, car inclus dans l'image de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n > N$. Ceci veut dire que $x_n = x$ pour tout $n > N$.

Par ailleurs, les suites constantes à partir d'un certain rang sont toujours convergentes vers cette valeur. (Dans n'importe quel espace topologique).

La fonction identité $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{coden}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$ n'est pas continue car le complémentaire d'un point est indénombrable, et pourtant la propriét recherchée est trivialement vérifiée. □

Exercice 3. Montrer que

(a) "être de Hausdorff" et "être métrisable" sont des propriétés topologiques;

(b) une application $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, bijective et fermée (i.e. l'image d'un fermé par f est fermé);

(c) si $\left(f_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X_i', \mathcal{T}_i')\right)_{i\in I}$ est une famille d'homéomorphismes alors

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i\right) \cong \left(\prod_{i\in I} X_i', \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i'\right).$$

Preuve.

(a) Supposons qu'on a un homéomorphisms $f : X \longrightarrow Y$.

- Si Y est d'Hausdorff, X l'est aussi, puisque f est injective et continue (Exercise 1a, Série 7).
- On va montrer que si Y est métrisable avec une metrique d_Y, alors X est métrisable aussi. On definit

$$d_X : X \times X \longrightarrow [0, +\infty) \text{ par } d_X(x, x') := d_Y(f(x), f(x')).$$

En effet d_X est bien une métrique, puisque f est injective et d_Y est une métrique. Ensuite, elle induit la topologie de X, i.e. $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{d_X}$.

— $[\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{d_X}]$; Soit $U \in \mathcal{T}_X$, et $x \in U$. Comme f est ouverte $f(U)$ est ouvert dans $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{d_Y}$. Alors on trouve une boule $B_Y(f(x), \varepsilon)$ qui est entierement contenue dans $f(U)$, et ensuite $B_X(x, \varepsilon)$ est contenue dans U. Donc U est ouvert dans la topologie induite par la métrique.

— $[\mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_{d_X}]$; Soit $B_X(x, \varepsilon)$ une boule dans X. On peut l'écrir comme

$$B_X(x, \varepsilon) = f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)),$$

ce qui est ouvert puisque f est continue et les boules sont ouvertes dans Y.

(b) On rappelle que un homéomorphisme est un application continue bijective et ouverte.

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. On va montrer que f est fermée. Soit $F = X \setminus U$ un fermé de X. Alors $f(F) = f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U) = Y \setminus f(U)$, ce qui est fermée puisque U est ouvert et f est ouverte.
- Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue bijective et fermé. On va montrer que f est ouverte. Soit $U = X \setminus F$ un ouvert de X. Alors $f(U) = f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F) = Y \setminus f(F)$, ce qui est ouvert puisque F est fermé et f est fermée.

(c) Soit $f_i : X_i \longrightarrow X_i'$ est l'homéomorphisme qui est donné pour tout $i \in I$, et f_i' son inverse. On denote p_i les projections de $\prod_{i\in I} X_i$ et p_i' celles de $\prod_{i\in I} X_i$. On va définir deux functions continues $f : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i'$ et $f : \prod_{i\in I} X_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ qui sont inverses l'une pour l'autre.

Soient $f((x_i)_{i\in I}) := (f_i(x_i))_{i\in I}$ et $f'((x_i')_{i\in I}) := (f_i'(x_i'))_{i\in I}$. On a que f et f' sont inverses l'une pour l'autre. Ensuite f est continue, parce que pour tout $i \in I$ on a $p_i' \circ f = f_i \circ p_i$, ce qui est continue. De facon similaire f' est continue aussi. $\square$

Exercice 4. Considérons les groupes

$$\mathrm{SO}_n := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \;\middle|\; AA^t = E \text{ et } \det A = 1 \right\}$$

$$\mathrm{SU}_n := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} \;\middle|\; AA^* = E \text{ et } \det A = 1 \right\}$$

comme sous espaces de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ et $(\mathbb{C}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un *groupe topologique*, ce qui veut dire que la multiplication des matrices et prendre l'inverse sont des applications continues

$$\mu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \iota\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En conclure que SO_n et SU_n sont aussi des groupes topologiques (en fait des sous groupes topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

(c) Montrer que $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ comme groupes topologiques, ce qui veut dire qu'il existe un isomorphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ qui est aussi un homéomorphisme.

(d) Montrer que SU_2 est homéomorphe à S^3.

Preuve.

(a) On rappelle que les applications $+, \cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $(-)^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont continues. On peut par exemple utiliser la caractésrisation de la continuité par les suites, puisque les espaces sont métrisables, et utiliser les résultats d'analyse sur la convergence d'une somme et d'un produit de suites, ou utiliser directement ε, δ.

On considère $\pi_{ij} : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application qui associe a une matrice M sa composante M_{ij}. Par un théorème du cours, la multiplication de matrices $\mu : \mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$, $C(M, M') = MM'$ est continue si et seulement si $\pi_{ij}\mu$ est continue. Or

$$\pi_{ij}\mu(M, M') = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot M'_{kj},$$

□

donc $\pi_{ij}\mu(M, M')$ est continue comme composition d'applications continues (sommes, produits et projections), et donc μ est continue.

Par consequent, $\mu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue comme application obtenue par restriction du domaine et du codomaine d'une application continue.

Comme précédemment, $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est continue comme composition d'applications continues (sommes, produits et projections). Pour l'inversion, on rappelle la formule de Laplace, qui dit que $\pi_{ij}\iota(M) = \frac{\mathrm{Cof}_{ji}(M)}{\det M}$, où $\mathrm{Cof}_{ij}(M) = (-1)^{i+j} \det A^{ij}(M)$ et $A^{ij} : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{(n-1)^2}$ est l'application qui supprime la ième ligne et la jème colonne. Cette formule montre que $\pi_{ij}\iota$ peut-être obtenue comme composition d'applications continues. Par conséquent, $\iota\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue.

(b) Il suffit de remarquer que SO_n et SU_n sont des sous groupes, ceci découle de propriété uniquement algébriques. Il faut utiliser le fait que $\det A \cdot \det B = \det AB$ et que $(AB)^* = B^*A^*$ pour la multiplication, et que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, et que $A^* = A^{-1}$ pour l'inverse. La multiplication et l'inversion sont alors des applications continues comme applications obtenues par restriction du domaine et du codomaine de μ et ι.

(c) On définit une application $f : \mathrm{SO}(2) \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ par $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+ib$ et $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par $g(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, qui sont trivialement continues. On remarque que $g(S^1) \subseteq \mathrm{SO}(2)$, on obtient donc bien $\bar{g} : S^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(2)$ continue comme restriction.

Par ailleurs, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\bar{g}f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Or $A \in \mathrm{SO}(2)$ implique que $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ et $ad - bc = 1$. En en multipliant par d la 2ème equation et en y substituant la dernière equation, on obtient que $(1+bc)c+bd^2=0$, ce qui veut dire $c+b(c^2+d^2)=0$, et donc avec la première equation on obtient que $c=-b$. Avec la même démarche mais en multipliant par c la 2ème equation, on obtient que $a=d$ et donc $\bar{g}f=\mathrm{id}_{\mathrm{SO}(2)}$. Le fait que $f\bar{g}=\mathrm{id}_{S^1}$ est trivial.

Par conséquent, $\bar{g}$ est un homémorphisme. Il faut maintenant montrer que c'est un homomorphisme de groupe. Ce calcul facile est laissé au lecteur.

(d) On remarque que $S^3\cong\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|x|^2+|y|^2=1\}\subseteq\mathbb{C}^2$, et on procède exactement de la même manière, avec pour seule différence que les coefficients sont complexes, et que $g(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$.

TOPOLOGIE - SÉRIE 10

Exercice 1. Soit X un ensemble totalement ordonné. Montrer que si une application non décroissante $f\colon (X, \mathcal{T}_<) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ a la propriété de la valeur intermédiaire (i.e. si x, $x' \in X$ et $y \in Y$ avec $f(x) \leqslant y \leqslant f(x')$ il existe $x'' \in X$ tel que $f(x'') = y$), elle est continue.

Preuve. Nous allons montrer la continuité locale de f. Soit $]a, b[$ un ouvert de base non vide de la topologie standard sur $\mathbb{R}$ et $x \in X$ tel que $f(x) \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a < f(x) - \varepsilon$ et $f(x) + \varepsilon < b$.

On va définir z_0 et z_1 de sorte à ce que $x \in]z_0, z_1[$ et et $]z_0, z_1[\subseteq f^{-1}(]a, b[)$.

- Si pour tout $y_0 \in X$, $f(y_0) > a$, alors on pose $z_0 = -\infty$. Sinon, il existe $y_0 \in X$ tel que $f(y_0) \leqslant a$. Alors par la propriété de valeur intérmédiare, il existe $z_0 \in X$ tel que $f(z_0) = f(x) - \varepsilon$.
  De plus, puisque f est non décroissante, $z_0 < x$.
  On remarque que pour tout $w \in]z_0, x[$ on a que $a < f(w) \leqslant f(x) < b$ et donc $f(]z_0, x[) \subseteq]a, b[$.
- De même, si pour tout $y_1 \in X$, $f(y_1) < b$, alors on pose $z_1 = +\infty$. Sinon, il existe $y_1 \in X$ tel que $f(y_1) \geqslant b$. Alors par la propriété de valeur intérmédiare, il existe $z_1 \in X$ tel que $f(z_1) = f(x) + \varepsilon$.
  Puisque f est non décroissante, $x < z_1$.
  On remarque que pour tout $w \in]x, z_1[$ on a que $a < f(x) \leqslant f(w) < b$ et donc $f(]x, z_1[) \subseteq]a, b[$.

Il suffit maintenant de remarquer que $f(]z_0, z_1[) = \{f(x)\} \cup f(]z_0, x[) \cup f(]x, z_1[) \subseteq]a, b[$. □

Exercice 2.

(a) Démontrer que pour toute application continue $f\colon (S^1, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, il existe $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

(b) Soit $f\colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}) \to ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]})$ une application continue.
- Considérer l'application graphe $F\colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $x \mapsto (x, f(x))$. Que peut-on dire sur sa continuité?
- Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Preuve.

(a) Considérons l'application $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, definie par $g(x) := f(x) - f(-x)$. Alors g est continue parce que elle est la composition de fonctions continue, de le facon suivante:

$$g: \; S^1 \xrightarrow{(\text{id}, -\text{id})} S_1 \times S_1 \xrightarrow{f \times f} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x, -x) \mapsto (f(x), f(-x)) \mapsto f(x) - f(-x).$$

Si g n'est pas toujour zero, il y a $y \in S^1$ tel que $g(y) \neq 0$, et alors $g(-y) = -g(y)$ a le signe oppos'e. Ensuite, S^1 est connexe, donc on peut utiliser le théorème de la valeur intermediare pour conclure qu'il existe $z \in S^1$ tel que $g(z) = 0$, c'est à dire que $f(z) = f(-z)$.

(b) L'application graphe est toujour continue parce que ses composantes sont l'application identité et f, ce qui sont continues. Considérons l'application $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definie par $g(x) := f(x) - x$. Alors g est continue parce que elle est la composition de fonctions continue, de le facon suivante:

$$g: \; I \xrightarrow{F} I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x, f(x)) \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x) - x.$$

Si g n'est pas zero dans 0 et 1, necéssairement $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. Ensuite, I est connexe, donc on peut utiliser le théorème de la valeur intermediare pour conclure qu'il existe $z \in I$ tel que $g(z) = 0$, c'est à dire que $f(z) = z$. $\square$

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer la connexité de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport aux plusieurs topologies différentes.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ est connexe par rapport à la topologie produit.
Indication: $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\omega$.

(b) Déterminer si $\mathbb{R}^\omega$ est connexe dans la topologie uniforme ou pas.
Indication: Considérer $\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x \textit{ bornée}\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.

(c) Et par rapport à la topologie boîte?

Preuve.

(a) On procède en deux étapes. On montre que le sous-espace $\mathbb{R}^\infty$ donné dans l'indication est connexe, et que son adhérence est $\mathbb{R}^\omega$. Tout d'abord, on identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des suites qui valent 0 à partir du $n+1$-ème terme et on remarque que la topologie de $\mathbb{R}^n$ est la même que celle donnée par la topologie de sous-espace sur $\mathbb{R}^\omega$ (avec la topologie produit). Par un théorème du cours, un produit fini d'espaces connexes et connexe, et donc $\mathbb{R}^n$ est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\mathbb{R}$ est connexe.
De plus, la suite identiquement nulle est dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par un théorème du cours, cela implique que $\mathbb{R}^\infty$ est connexe comme union de connexes d'intersection non vide.
Maintenant, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ un ouvert de base non vide de la topologie produit, et $j = \max\{i \in \mathbb{N} : U_i \neq \mathbb{R}\}$.
Alors la suite définie par $y_n = \left\{ \begin{array}{cc} x_n & n \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$, est telle que

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \mathbb{R}^{j+1} \subseteq \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \mathbb{R}^\infty.$$

Ceci montre que $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie produit est connexe, comme adhérence d'un sous-espace connexe.

(b) On va montrer que le sous-ensemble $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \text{ est borné }\}$ est à la fois ouvert et fermé dans la topologie uniforme. Cela donne une séparation de $\mathbb{R}^\omega$ muni de cette topologie, il n'est donc pas connexe.
Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, c'est à dire telle qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ avec $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leqslant B$ et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n| = |(y_n - x_n) + x_n| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n| < \frac{1}{2} + B.$$

Par conséquent, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leqslant B + \frac{1}{2}$ et donc $B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2}) \subseteq A$. Ceci montre que A est ouvert.
Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée, c'est à dire telle que pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $|x_n| > B$, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$.

Soit $B \in \mathbb{R}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| > B+\frac{1}{2}$. or $|x_n| = |(y_n-x_n)+y_n| \leqslant |y_n-x_n|+|y_n|$, donc

$$|y_n| \geqslant |x_n| - |y_n - x_n| > B.$$

Ceci montre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc A est aussi fermé.

(c) Puisque la topologie boîte est plus fine que la topologie uniforme, A est aussi ouvert et fermé dans la topologie boîte, et donc $\mathbb{R}^w$ muni de la topologie boîte n'est pas connexe.

□

Exercice 4. (Courbe sinus du topologue) Montrer que la courbe sinus du topologue

$$T := \left\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \left]0,1\right]\right\} \cup \{(0,0)\}$$

aussi bien que la courbe sinus fermée du topologue

$$\overline{T} := \left\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \left]0,1\right]\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

est un sous-espace connexe de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

Preuve. On remarque d'abord que si f est une fonction continue definie sur un ensemble connexe, alors le graphic de f est connexe aussi (comme image du connexe par l'application continue definie par l'assignement $x \mapsto (x, f(x))$).

Si on note $A := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left]0,1\right]\}$, alors A est connexe, lorsqu'il est le graphic de l'application $x \in]0,1] \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$. Suppose que $T = X \cup Y$, avec X et Y ouverts et disjoints. Alors $A = (A \cap X) \cup (A \cap Y)$, où $A \cap X$ et $A \cap Y$ sont disjoints et ouverts dans le connexe A. Alors un d'eux est vide. Supposons $A = A \cap X$ et $A \cap Y = \varnothing$. Alors $A \subseteq X$, et si Y n'est pas vide on a que $A = X$ et $Y = \{(0,0)\}$. Mais $\{(0,0)\}$ n'est pas ouvert, puisque chaque boule ouverte centrée en $(0,0)$ contient toujours les elements de la forme $(\frac{1}{n\pi}, \sin(n\pi)) \in A$, pour n suffisantement grand. Cela est une contradiction, et donc $Y = \varnothing$ et T est connexe.

Ensuite, $\overline{T}$ est connexe aussi parce que est l'adherence de T, ce qui est connexe. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Exercice 1. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})_{i\in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs de X tels que pour tout $i,\, j \in I$ il y a $k \in I$ avec $Y_i \cap Y_k,\, Y_j \cap Y_k \neq \varnothing$ (e.g. si $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$) alors $\bigcup_{i\in I} Y_i$ est connexe par arcs;

(b) si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\big(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\big)$ est connexe par arcs;

(c) si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques connexes par arcs, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ est connexe par arcs.

Preuve.

(a) Si $\lambda : [a, b] \longrightarrow X$ et $\lambda' : [c, d] \longrightarrow X$ sont telles que $\lambda(b) = \lambda'(c)$ alors par le lemme de recollement, l'application $\lambda \star \lambda' : [a, b + (d - c)] \longrightarrow X$ définie par

$$[\lambda \star \lambda'](t) = \begin{cases} \lambda(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ \lambda'(c + t - b)) & b \leqslant t \leqslant b + (d - c) \end{cases}$$

est continue. On remarque que c'est un chemin de $\lambda(a)$ à $\lambda'(d)$.
Soient $x, y \in \bigcup_{s\in I} Y_s$. Alors il existe $i, j \in I$ tels que $x \in Y_i$, $y \in Y_j$. Par hypothèse, il existe $k \in I$, $z \in Y_k \cap Y_i$ et $w \in Y_k \cap Y_j$. Par hypothèse, Y_i, Y_k, Y_j sont connexes par arc, donc il existe des applications continues

- $\lambda_1 : [a, b] \longrightarrow Y_i \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_1(a) = x$ et $\lambda_1(b) = z$;
- $\lambda_2 : [c, d] \longrightarrow Y_k \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_2(c) = z$ et $\lambda_2(d) = w$;
- $\lambda_3 : [e, f] \longrightarrow Y_j \subseteq \bigcup_{s\in I} Y_s$ telle que $\lambda_3(e) = w$ et $\lambda_3(f) = y$.

Alors, $(\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3$ est un chemin dans $\bigcup_{s\in I} Y_s$ allant de x à y.

(b) Soient $y_1, y_2 \in f(X)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_i) = y_i$, pour $i = 1, 2$. Puisque X est connexe par arc, il existe $\lambda : [a, b] \longrightarrow X$ tel que $\lambda(a) = x_1$ et $\lambda_(b) = x_2$. Alors, $f \circ \lambda : [a, b] \longrightarrow f(X)$ est continue (comme composition d'applications continues), c'est un chemin allant de y_1 à y_2.

(c) Soient $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$. Soit $i \in I$. Puisque X_i est connexe par arc, et quitte a reparamétriser, il existe un chemin $\lambda_i : [0, 1] \longrightarrow X_i$ avec $\lambda_i(0) = x(i)$ et $\lambda_i(1) = y(i)$.
On obtient ainsi (via axiome du choix) une collection de chemins $(\lambda_i)_{i\in I}$, avec λ_i verifiant la propriété ci-dessus.
On utilise la propriété universelle du produit (une proposition du cours), qui implique l'existence d'une (unique) application continue $\lambda : [0, 1] \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ telle que $\lambda_i = \mathrm{proj}_i \circ \lambda$ pour tout $i \in I$. On remarque que $\lambda(0)(i) = \mathrm{proj}_i \circ \lambda(0) = \lambda_i(0) = x(i)$ pour tout $i \in I$, et donc $\lambda(0) = x$. De même, on vérifie que $\lambda(1) = y$, ce qui achève la preuve. $\square$

Exercice 2. Les espaces suivants, sont-ils connexes par arcs?

(a) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

(b) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

(c) $(I^2, \mathcal{T}_<)$ où $<$ est l'ordre lexicographique sur $I^2 = [0, 1]^2$
Indication: Pour un chemin dans I^2, considérer les préimages des segments verticaux $\{x\} \times]0, 1[$ et utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, ainsi que le fait que $\mathbb{Q} \cap I$ est dénombrable.

Preuve.

(a) On va monter que tous les points du disque D^n sont dans la même composante connexe par arcs que l'origine O, d'où le disque est connexe par arcs.
Pour chaque $P \in D^n$, le chemin defini par

$$t \in I \mapsto tP \in D^n$$

est bien defini et continue. En effet, chaque composante est de la forme $t \in I \mapsto tx$, pour quelque $x \in I$, et la multiplication de nombres réelles est continue.
Ensuite, $0 \mapsto O$ et $1 \mapsto P$.

(b) Dans S^0 il y a deux composantes connexe (par arcs), une pour chaque élément. Si $n > 0$, on va monter que tous les points du disque S^n sont dans la même composante connexe par arcs que $Q := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$, d'où la sphère est connexe par arcs.
Pour chaque $P = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, le chemin defini par

$$t \in I \mapsto (tx_1, \ldots, tx_n, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} t^2 x_j^2}) \in S^n$$

est bien defini et continue. En effet, chaque composante est de la forme

- soit $t \in I \mapsto t \cdot x$, pour quelque $x \in I$, et la multiplication de nombres réelles est continue.
- soit $t \mapsto \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} t^2 x_j^2}$, pour quelque $x_1, \ldots, x_n$, et les operations polynomials sont continues, aussi bien que la racine carrée.

Ensuite, $0 \mapsto Q$ et $1 \mapsto P$.

(c) On va montrer que les composantes connexes par arcs de I^2 sont les sous-ensembles de la forme suivante:

$$\{x\} \times I = \{(x, y) \mid y \in I\},$$

pour quelque $x \in I$.
En effet, pour tous $x \in I$ et $(x, y) \in \{x\} \times I$, il y a un chemin qui connecte (x, y) et $(x, 0)$:

$$t \in I \mapsto (x, ty).$$

Le chemin est bien defini et continue, puisque la topologie de sous-espace sur $\{x\} \times I$ est la même que celle induite par la topologie standard. Ensuite, $0 \mapsto (x, 0)$ et $1 \mapsto (x, y)$.
Pourtant, on remarque que:

- *I est séparable*; en effet $\mathbb{Q} \cap I$ est une partie dense et dénombrable.
- *l'image d'un espace topologique séparable par une application continue et surjective l'est aussi*; si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et X admet une partie dense dénombrable Q, alors $f(Q)$ est partie dense dénombrable pour Y. En effet, on a que:
  — $|f(Q)| \leq |Q|$, ce qui est dénombrable.
  — $\overline{f(Q)} = Y$. Soit $y \in Y$, et $U \subseteq Y$ un voisinage de y. La preimage $f^{-1}(U)$ est ouverte et non vide, donc elle contient quelque $q \in Q$. Mais alors U contient $f(q) \in f(Q)$.

- *les seuls intervals dans I^2 qui sont séparable sont ces qui ont image contenue dans quelque* $\{x\} \times I$; Soit $](a,b),(a',b')[\subseteq I^2$ un interval, et $a' > a$. Soit $\{(x_j, y_j) \mid \ \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable de $](a,b),(a',b')[$. En particulier, $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq I$ est dénombrable. Soit $x \in I \setminus \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Alors $](x, \frac{1}{3}),(x, \frac{2}{3})[$ est un voisinage de $(x, \frac{1}{2})$ qui ne contient (x_j, y_j) pour aucun $j \in \mathbb{N}$. On a montré que aucun sous-ensemble dénombrable de I^2 peut être dense.

Si $x < x'$, ce n'est pas possible de connecter deux points de la forme (x,y) et (x',y'). En effet, si un chemin contient les deux dans son image, par la Théorème de la valeure intermediaire (I est connexe!) il faut qu'elle soit un interval qui contienne tous l'interval $](x,y),(x',y')[$. Mais I est séparable, autant que $](x,y),(x',y')[$ ne l'est pas. □

Exercice 3. Montrer que SO_n (avec la topologie sous-espace de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$) est connexe par arcs. *Indication: Chaque matrice dans* SO_n *est conjugée à une matrice par blocs diagonales où chaque bloc est de la forme*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [1].$$

Preuve. On va montrer qu'il existe un chemin reliant l'identité I_n à toute matrice de SO_n. Soit $A \in \mathrm{SO}_n$ une matrice orthogonale de déterminant 1.

Alors, en utilisant de l'algèbre linéaire (nous ne détaillerons pas cette partie ici, le lecteur peut consulter *Linear Algebra Done Right* de Axler, théorème 7.38), on peut montrer qu'il existe une matrice de changement de base orthogonale P telle que

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix} P^{-1},$$

où A_i est une matrice de la forme $R(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$ ou bien $[1]$. (Le nombre de blocs de la forme $[-1]$ est pair puisque le déterminant est 1, on peut alors les regrouper 2 par 2 sous la forme $\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}$.) On montre le résultat par récurrence sur le nombre de blocs de la forme $R(\alpha_i)$ avec $\cos\alpha_i \neq 1$.

S'il y en a 0, alors c'est trivial, car alors $A = I_n$. Supposons qu'il existe un chemin reliant l'identité à toute matrice de SO_n pouvant s'écrire sous la forme ci-dessus avec k blocs non triviaux (de la forme $R(\alpha_i)$ avec $\cos\alpha_i \neq 1$), et montrons qu'alors c'est aussi vrai pour les matrices avec $k+1$ blocs non triviaux.

Soit donc une telle matrice A et soit A_j le premier bloc non trivial.

On définit l'application $\lambda : [0, \alpha_j] \longrightarrow R^{n^2}$ donnée par

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_{j-1} & & & & \\ & & & R(t) & & & \\ & & & & A_{j+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_m \end{bmatrix}.$$

□

Celle-ci est continue car les fonctions cos et sin sont continues. Par ailleurs, le codomaine de l'application peut être restreint à SO_n. Maintenant, puisque la multiplication $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ est continue, l'application de conjugaison par P, $\mathrm{conj}_P : \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ qui associe à M la matrice PMP^{-1} est aussi continue. Par ailleurs, cette application se restreint à une application $\mathrm{conj}_P : \mathrm{SO}_n \longrightarrow \mathrm{SO}_n$.

On remarque maintenant que $\mathrm{conj}_P \circ \lambda$ est un chemin entre $P\lambda(0)P^{-1}$ et A. Puisque $\lambda(0)$ a k blocs non triviaux et par hypothèse de récurrence, il existe un chemin c reliant I_n à $P\lambda(0)P^{-1}$. Par conséquent, la concaténation des chemins $c \star (\mathrm{conj}_P \circ \lambda)$ avec point de départ I_n et point d'arrivée A.

Exercice 4. Montrer que

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ (où $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}}$ est la topologie cofinie) est connexe;

(b) si X est un ensemble avec $|X| \geqslant 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, alors $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est connexe par arcs.
Indication: Considérer d'abord le cas $X = \mathbb{R}$ et pour le cas général, utiliser qu'un sous-espace de $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est aussi muni de la topologie cofinie.

Preuve.

(a) Soit $\mathbb{N} = A \cup B$, avec A et B disjoints. Si A est ouvert, lorsque B est contenu dans le complementaire de A il est fini. Mais alors B est ouvert si et seulement si B est vide. Ca montre que $\mathbb{N}$ est connexe.

(b) On va montrer que dans $\mathbb{R}$ avec la topologie cofinie tous les points sont dans la même composante connexe par arcs que 0. Soit x dans $\mathbb{R}$. Considerons l'application:

$$a: \ I \longrightarrow (\mathbb{R}, cof) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, st) \ ,$$

donnée par $t \mapsto tx \mapsto tx$. Alors a est continue, parce que la topologie cofinie est moins fine que la topologie standard. Ensuite $0 \mapsto 0$ et $1 \mapsto x$.

Soit maintenant X est un espace topologique non dénombrable avec la topologie cofinie. On va monter qu'il y a une seule composante connexe par arcs. Soient x et y dans X. Soit $R \subseteq X$ un sous-ensemble qui a la même cardinalité que $\mathbb{R}$ et qui contient x et y. Il existe une bijection $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi(y) = 0$. Ensuite, φ est un homéomorphisme si on considère on $\mathbb{R}$ la topologie de sous-espace (ce qui est toujours la topologie cofinie!) et la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$. Considerons le chemin

$$a: \ I \longrightarrow (\mathbb{R}, cof) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, st) \xrightarrow{\varphi^{-1}} R \subseteq X \ ,$$

defini par $t \mapsto t\varphi(x) \mapsto t\varphi(x) \mapsto \varphi^{-1}(t\varphi(x))$. On a que $0 \mapsto 0\varphi(x) = 0 \mapsto 0 \mapsto \varphi^{-1}(0) = y$ et $1 \mapsto 1\varphi(x) = \varphi(x) \mapsto t\varphi(x) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. Donc on a connecté x et y. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 12

Dans la géométrie différentielle on parle souvent des “variétés connexes” même si on veut vraiment dire “variétés connexes par arcs”. L'exercice suivant est une justification pour ça.

Exercice 1. Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.
Indication: Utiliser la caractérisation du cours et conclure que les composantes connexes par arcs sont ouvertes.

Solution. Les composantes connexes par arcs d'un espace X forment une partition et en notant que les composantes connexes par arcs sont non-vides et ouvertes (être localement connexe par arcs implique que chaque point a un voisinage connexe par arcs), la connexité de X implique qu'il y a qu'une seule composante connexe par arcs. □

Exercice 2. Dans cet exercice tous les espaces de matrices sont considérés comme sous-espaces de $\mathbb{C}^{n^2}$ muni de la topologie standard. Déterminer les composantes connexes par arcs de

(a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
(c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$
(d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
(e) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Indication: Pour (a) et (c), se convaincre que pour chaque $A \in \mathrm{GL}_n$, ils existent des matrices élémentaires $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l$ de la forme $E + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ telles que $P_1 \ldots P_k A Q_1 \ldots Q_l$ est une matrice diagonale. Après réduire au cas SO_n et utiliser l'exercice 4 de la semaine passée. Pour (b) et (d), réduire à (a) et (c).

Solution. On remarque que, de l'algèbre linéaire, on peut réduir n'importe quelle matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) à une matrice diagonale par un nombre fini d'*opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes*. En particulier, une opération sur les lignes corresponde exactement á multiplier á gauche par une matrice $Q^{\bar{i},\bar{j}}(q)$ de la forme suivante. Pour des $\bar{i} \neq \bar{j}$ fixés et tels que $n \geq \bar{i}, \bar{j} \geq 1$ et q dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$):

$$Q^{\bar{i},\bar{j}}(q)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ q & \text{si } i = \bar{i} \text{ et } j = \bar{j} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

De façon similaire, une opération sur les colonnes est équivalent à multiplier à droite par une telle matrice.

Donc pour n'importe quelle matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), il y a des matrices élémentaires à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que

$$M = Q^{i_k,j_k}(q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}(q_1) D(d_1, \ldots, d_n) Q^{i'_1,j'_1}(q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}(q'_{k'}),$$

avec $D(d_1, \ldots, d_n)$ diagonale, de la forme

$$D(d_1, \ldots, d_n)_{i,j} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En particulier toutes les $Q^{i,j}$ sont inversibles de déterminant 1.

(a): Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Alors il y a

$$D(d_1, \ldots, d_n) = Q^{i_k,j_k}(q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}(q_1) M Q^{i'_1,j'_1}(q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}(q'_{k'}),$$

avec $D(d_1, \ldots, d_n)$ diagonale de déterminant 1; c'est à dire $d_1 \cdot \cdots \cdot d_n = 1$.

- On peut connecter M et $D(d_1, \ldots, d_n)$ par le chemin

$$\alpha_1 \colon t \mapsto Q^{i_k,j_k}((1-t)q_k) \cdots Q^{i_1,j_1}((1-t)q_1) M Q^{i'_1,j'_1}((1-t)q'_1) \cdots Q^{i'_{k'},j'_{k'}}((1-t)q'_{k'}),$$

qui est continue et tel que tout $\alpha_1(t)$ est de déterminant 1.

- On peut connecter $D(d_1, \ldots, d_n)$ à une matrice diagonale D' dont les valeurs sur la diagonale sont seulement 1 et -1. Explicitement, on a le chemin

$$\alpha_2 \colon t \mapsto \begin{bmatrix} A(t) := D\left(t \operatorname{sign} d_1 + (1-t)d_1, \ldots, t \operatorname{sign} d_{n-1} + (1-t)d_{n-1}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det A(t)} \end{bmatrix},$$

qui est continue et tel que $\alpha_2(t)$ est toujours de déterminant 1.

- On peut connecter D' à la matrice identité, puisque D' et la matrice identité sont dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ce qui est connexe par arcs.

Donc chaque matrice dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est dans la même composante connexe par arcs de la matrice identité, ce que veut dire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(b): Comme $\det \colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ est continue (c'est une application polynômiale dans les coefficients de la matrice) et $\mathbb{R}^\times$ a deux composantes connexes par arcs, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ doit avoir au moins deux composantes connexes par arcs; à savoir les matrices de déterminant positif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ et celles de déterminant négatif $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$. Il faut donc montrer que ces deux sous-espaces sont connexes par arcs. Alors, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$.

- On peut connecter M une matrice $M' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, par le chemin

$$\alpha_1 \colon I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\, t \mapsto D\left(1, \ldots, 1, t + \frac{(1-t)}{\det M}\right) \cdot M.$$

- Ensuite, on peut connecter $M' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ à la matrice identité $E = D(1, \ldots, 1)$, puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Donc chaque matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+$ est dans la même composante connexe par arcs que la matrice identité E. Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ on note que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_- \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_+,\, M \mapsto D(1, \ldots, 1, -1)M$$

est un homéomorphisme et alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_-$ est aussi connexe par arcs. En résumé, on a montré que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs; les matrices de déterminant positif et celles de déterminant négatif.

(c) & (d): Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$). Comme dans le cas réel on peut connecter M à une matrice diagonale $D(d_1, \ldots, d_n)$ du même déterminant (i.e. $\det M = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$). Vu que $\mathbb{C}^\times$ est connexe par arcs, on peut choisir des chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \colon I \to \mathbb{C}^\times$ tels que $\gamma_i(0) = d_i$, $\gamma_i(1) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\gamma_n(0) = \det M$, $\gamma_n(1) = 1$ (pour $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ il faut choisir le chemin constant). Maintenant,

$$t \mapsto \begin{bmatrix} A(t) := D(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n-1}(t)) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_n(t)}{\det A(t)} \end{bmatrix},$$

est un chemin dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) entre $D(d_1, \ldots, d_n)$ et $E = D(1, \ldots, 1)$. Alors, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

(e): Par le même argument que pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'espace $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a au moins deux composantes connexes par arcs; les matrices de déterminant positif $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et les matrices de déterminant négatif $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})_-$. On sait déjà que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et l'application

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto D(1,\dots,1,-1)M$$

est un homéomorphisme. Alors, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})_-$ sont les composantes connexes par arcs de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. □

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport à des topologies différentes.

(a) Déterminer les composantes connexes par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, *_{n\in\omega}\mathcal{T}_{\text{st}})$.

(b) Montrer que deux suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\bar{\rho}})$ si et seulement si $x - y = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$.

(c) Démontrer que deux suites x, y sont dans la même composante connexe par arcs de $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\text{box}})$ si et seulement si $x - y$ est nulle presque partout (i.e. ssi $x - y \in \mathbb{R}^\infty$).
Indication: Il suffit de considérer le cas $y = 0$. De plus, si $x \notin \mathbb{R}^\infty$ il existe un homéomorphisme $f\colon (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\text{box}}) \to (\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_{\text{box}})$ tel que $f(0) = 0$ et $f(x)$ n'est pas bornée.

Preuve.

(a) Par l'exercice 1(c) de la série 11, et puisque $\mathbb{R}$ est connexe par arc, alors $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie du produit est connexe par arc.

(b) On résout d'abord le cas $y = 0$. On a déja vu dans la série 10 exercice 3(b) que l'ensemble des suites bornées et son complémentaire forment une séparation de $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie uniforme. Par conséquent, puisque la suite $y = 0$ est bornée, pour toute suite x non bornée, x et y ne peuvent être dans la même composante connexe et donc a fortiori dans la même composante connexe par arc.
Supposons maintenant que x est borné et on construit l'application $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ définie par $\lambda(t)_n = t \cdot x_n$. Il est clair que $\lambda(0) = y$ et $\lambda(1) = x$. Il reste donc à montrer que λ est continue. Pour cela, utilisons la continuité ε-δ. Soit $1 > \varepsilon > 0$. Puisque x est borné, il existe $B \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| < B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $\delta = \frac{\varepsilon}{2B}$. Pour $s, t \in I$ avec $|t - s| < \delta$, alors

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\lambda(t), \lambda(s)) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|t \cdot x_n - s \cdot x_n|, 1)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|t - s||x_n|, 1)\\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que λ est continue et donc que la composante connexe par arc de $y = 0$ dans $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie uniforme est l'ensemble des suites bornées.
Maintenant, on remarque que pour $y \in \mathbb{R}^\omega$, l'application $-+y : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$, $x \mapsto x+y$ est continue lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie uniforme (utiliser $\delta = \varepsilon$). Par conséquent, si $x, y \in \mathbb{R}^\omega$ sont tels que $x - y$ est bornée, alors par ce qui précède, il existe un chemin continu entre 0 et $x - y$. En post-composant ce chemin par l'application continue $- + y$, on obtient un chemin continu entre y et x.

Supposons maintenant qu'il existe un chemin continue entre y et x. Alors en post-composant par l'application continue $- + (-y)$, on obtient un chemin entre 0 et $x - y$. Ceci montre que $x - y$ est borné, par le cas $y = 0$.

(c) On résout d'abord le cas $y = 0$. Si $x \in \mathbb{R}^\infty$, alors on considère le même chemin que pour le (b) et on montre sa continuité locale. Pour cela soit $t \in I$ et $U = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ un ouvert de base de la topologie boîte sur $\mathbb{R}^\omega$ qui contient $\lambda(t)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n > N$ (ceci existe car $x \in \mathbb{R}^\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe γ_n tel que $]\lambda(t)_n - \gamma_n, \lambda(t)_n + \gamma_n[\subseteq]a_n, b_n[$ et on pose $\varepsilon = \min_{n\leqslant N} \gamma_n$. Par (b), il existe δ tel que si $|s - t| < \delta$, alors $\lambda(s) \in B_{\bar{\rho}}(\lambda(t), \varepsilon)$. Ceci implique que pour tout $n \leqslant N$, $|\lambda(t)_n - \lambda(s)_n| < \gamma_n$ et donc $\lambda(s)_n \in]a_n, b_n[$. De plus, si $n > N$, alors $\lambda(s)_n = \lambda(t)_n = 0$. Ceci montre que pour tout $s \in B(t, \delta), \lambda(s) \in U$. Ceci montre que λ est continu pour la topologie boîte lorsque $x \in \mathbb{R}^\infty$.

Maintenant, on montre que pour $y, z \in \mathbb{R}^\omega$ avec $z_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications $-+y : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ et $- \cdot z : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ sont continues lorsque $\mathbb{R}^\omega$ est muni de la topologie boîte.

Soit $U = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ un ouvert de base. Alors $(- + y)^{-1}(U) = \prod_{n\in\mathbb{N}}]a_n - y_n, b_n - y_n[$ qui est ouvert, donc $- + y$ est bien continue. Par ailleurs, $(- \cdot z)^{-1}(U) = \prod_{n\in\mathbb{N}}]\frac{a_n}{z_n}, \frac{b_n}{z_n}[$ qui est ouvert, donc $- \cdot z$ est bien continue.

Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin entre 0 et x avec $x \notin \mathbb{R}^\infty$. Alors il existe une suite d'indices strictement croissante $k_i, i \in \mathbb{N}$ tels que $x_{k_i} \neq 0$. On définit $z_{k_i} = \frac{i}{|x_{k_i}|}$ et si $n \neq k_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = 1$.

Puisque $- \cdot z : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ est continue, il existe un chemin entre 0 et $x \cdot z$. On remarque que $|(x \cdot z)_{k_i}| = i$ et donc la suite $(x \cdot z)$ est non bornée. Cela constitue une contradiction avec (b), puisque la topologie boîte est plus fine que la topologie uniforme.

Ceci montre que la composante connexe par arc de 0 dans $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie boîte est $\mathbb{R}^\infty$.

On procède maintenant comme dans (b) pour établir le cas général $(y \neq 0)$. □

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

$$\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ est un point d'accumulation de } \mathcal{F}\}.$$

Preuve. Soit x un point d'accumation d'un filtre $\mathcal{F}$ et $M \in \mathcal{F}$. Alors, par définition, pour tout voisinage ouvert U de x, $U \cap F \neq \varnothing$, et donc $x \in \overline{M}$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M}$.

Réciproquement, si $x \in \bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M}$, alors pour tout voisinage ouvert U de x et tout $M \in \mathcal{F}$, $U \cap M \neq \varnothing$ puisque $x \in \overline{M}$, ce qui montre que x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 13

Exercice 1. Montrer que pour un espace compact $(X, \mathcal{T})$, toute projection

$$\mathrm{pr}_2 \colon (X \times Y, \mathcal{T} * \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$$

avec $(Y, \mathcal{T}')$ un espace quelconque est fermée (i.e. l'image d'un fermé par pr_2 reste fermé).

Preuve. Soit F un fermé de $X \times Y$ et $y \notin \mathrm{pr}_2(F)$. Ceci implique que $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$. Par le lemme du tube, il existe un ouvert V contenant y tel que $X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus F$. Ceci montre que $y \in V \subseteq Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$, c'est-à-dire que le complémentaire de $\mathrm{pr}_2(F)$ est ouvert dans Y, et donc que $\mathrm{pr}_2(F)$ est fermé. □

Remarque. Une application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est appelée *propre* si et seulement si pour tout espace $(Z, \mathcal{T}'')$, l'application produit $f \times \mathrm{id}_Z \colon (X \times Z, \mathcal{T} * \mathcal{T}'') \to (Y \times Z, \mathcal{T}' * \mathcal{T}'')$ est fermé. Alors l'exercice dit que pour $(X, \mathcal{T})$ compact, l'application unique $X \to *$ est propre.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (vu comme sous-espaces de $\mathbb{R}^{n^2}$ avec la topologie standard) sont compacts.
Indication: Une matrice est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale.*

Preuve. Comme la topologie des espaces de matrices est toujours euclidéenne, on peut utiliser le Théorème de Heine-Borel (série 14). On a que:

- $O_n(\mathbb{R})$ est borné; en fait, pout n'importe quelle $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $i, j = 1, \ldots, n$, de l'equation $MM^t = Id$ on deduit

$$|M_{i,j}| = \sqrt{|M_{i,j}|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} = \sqrt{1} = 1;$$

  En particulier ca donne que $O_n(\mathbb{R})$ ets borné.
- Pour avoir que $SO_n(\mathbb{R})$ est compacte, ca suffit de montrer qu'il est fermé dans $O_n(\mathbb{R})$, ce qui est compact. On peut l'écrir de la facon suivante:

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det{}^{-1}(\{1\}),$$

  et donc il est fermé dans $O_n(\mathbb{R})$. □

Exercice 3. (Compactifié d'Alexandrov) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\dot{X} := X + \{\infty\}$ l'union disjointe de X et un point ∞. Appelons un sous-ensemble $U \subseteq \dot{X}$ ouvert si et seulement si soit $U \subseteq X$ est ouvert soit $\infty \in U$ et $X \setminus U \subseteq X$ est fermé et compact. Montrer que

(a) avec cette définition des ouverts, $\dot{X}$ est un espace topologique compact;

(b) $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace ouvert de $\dot{X}$ et $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ est fermé;

(c) si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact;

(d) chaque application continue $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé *propre*) induit une application continue $\dot{f} \colon \dot{X} \to \dot{Y}$ avec $\dot{f}|_X = f$ et $\dot{f}(\infty) = \infty$;

(e) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact de Hausdorff, $x \in X$ et $X' := X \setminus \{x\}$, alors $\dot{X}'$ est homéomorphe à $(X, \mathcal{T})$;

(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.
Indication: Projection stéréographique.

Preuve.

(a) $\dot{X}$ *est un espace topologique compact*; En effet:

- L'ensemble vide est ouvert, comme il est un ouvert dans X, et $\dot{X}$ est ouvert, comme $X \setminus \dot{X} = \varnothing$ est un compact fermé de X.
- Considère une réunion d'une famille de sous-ensembles $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\dot{X}$. Si tous V_i est contenu dans X, il est ouvert et la réunion l'est aussi.

  Sinon il existe V_j qui contient ∞, et $X \setminus V_j$ est compact et fermé. Alors $\bigcup_{i \in I} V_i$ contient ∞ et son complementaire dans X est

  $$X \setminus (\bigcup_{i \in I} V_i) = X \setminus V_j \cap \bigcap_{i \neq j} (X \setminus V_i),$$

  ce qui est compact et fermé, puisque $X \setminus V_j$ est compact et fermé et $\bigcap_{i \neq j}(X \setminus V_i)$ est fermé. Donc $\bigcup_{i \in I} V_i$ est ouvert.
- Considère une intersection finie d'une famille de sous-ensembles $\{V_i\}_{i \in I}$ de $\dot{X}$. S'il existe V_j qui est contenu dans X, l'intersection ne contient pas ∞ et on peut lécrire

  $$\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \cap U_i),$$

  ce qui est ouvert dans X puisque c'est une intersection finie d'ouverts dans X.

  Si tous V_i contient ∞, et $X \setminus V_i$ est compact et fermé, alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ contient ∞ et son complementaire dans X est

  $$X \setminus (\bigcap_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus V_j),$$

  ce qui est compact et fermé, puisque c'est une réunion finie de sous-espaces compacts et fermés.

Pour voir que $\dot{X}$ est compact, suppose qu'on a un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i \in I}$. En particulier ∞ appartient à V_j pour quelque j, et $X \setminus V_j$ est compact. Donc un nombre fini de V_i est suffisant pour couvrir $X \setminus V_j$. En rajoutant V_j à ce recouvrement, on a un recouvrement de $\dot{X}$, toujours fini. Donc $\dot{X}$ est compact.

(b) X *est un sous-espace ouvert de* $\dot{X}$ *et* $\{\infty\} \subseteq \dot{X}$ *est fermé*; Clairement X est ouvert dans $\dot{X}$, et donc le complementaire $\{\infty\}$ est fermé.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, alors $\dot{X}$ est de Hausdorff si et seulement si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact; Supposons X d'Haussdorff.

- [$\Longrightarrow$]; On va montrer que chaque point de X a un voisinage compact. Soit $x \in X$. Comme $\dot{X}$ est d'Hausdorff, on peut séparer x et ∞ par deux ouverts disjoints U et V dans $\dot{X}$, où U contient x et V contient ∞. Mais alors $X \setminus V$ est compact, et il contient U. Donc il est un voisinage compact de x.

- [$\Longleftarrow$]; On va montrer que $\dot{X}$ est d'Hausdorff. Soient x et x' deux points differents de $\dot{X}$. Si les deux sont dans X, comme X est d'Hausdorff, on peut les separer par deux ouverts disjoints dans X. Supposons après que $x' = \infty$. Prenons V un voisinage compact (et donc fermé) de x dans X. Ca veut dir qu'il existe un ouvert U dans X tel que $x \in U \subseteq V$. Alors U et $\{\infty\} \cup (X \setminus V)$ sont deux ouverts disjoints de $\dot{X}$ et ils contiennent réspectivement x et ∞. Donc $\dot{X}$ est d'Hausdorff.

(d) *Chaque application continue $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dont les préimages des compacts sont compacts (parfois aussi appelé propre) induit une application continue $\dot{f}\colon \dot{X} \to \dot{Y}$ avec $\dot{f}|_X = f$ et $\dot{f}(\infty) = \infty$*; Une telle fonction $\dot{f}$ est bien definie, et continue sur X. Il reste à montrer la continuité en ∞. Soit $U \subset \dot{Y}$ un voisinage de $\infty = \dot{f}(\infty) \in \dot{Y}$. En particulier, $U = \{\infty\} \cup U'$, où $Y \setminus U'$ compact. Alors $\dot{f}^{-1}(U)$ contient ∞ et le complementaire dans X est

$$X \setminus \dot{f}^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(U') = f^{-1}(Y \setminus U'),$$

ce qui est compact et fermé. Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $\dot{X}$ et $\dot{f}$ est continue.

(e) *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact de Hausdorff, $x \in X$ et $X' := X \setminus \{x\}$, alors $\dot{X}'$ est homéomorphe à $(X, \mathcal{T})$*; On peut d'efinir une bijection:

$$\varphi : \dot{X}' \longrightarrow X,$$

où $\varphi(x') := x'$ si $x' \neq \infty$ et $\varphi(\infty) := x$. On a que φ est continue sur X'. On va montrer que l'est aussi dans ∞. Soit U un voisinage de $x = \varphi(\infty)$ dans X. Alors $\varphi^{-1}(U)$ contient ∞ et $X' \setminus \varphi^{-1}(U) = X \setminus U$, ce qui est fermé dans le compact X, et donc est compact lui même. Ca montre que $\varphi^{-1}(U)$ et ouvert et φ et continue. Ensuite, $\dot{X}'$ est compact, et X est d'Hausdorff, donc il faut que φ soit un homeomorphisme.

(f) $\dot{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ *où $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard*; en utilisant le point precedent (les spheres sont compactes et d'Hausdorff), ca suffit de montrer que $S^n \setminus \{P\}$, pour n'importe quel $P \in S^n$, est homeomorphe à $\mathbb{R}^n$. Soit $P := (1, 0, \ldots, 0)$ dans la sphere. Alors on définit la projection stereographique

$$\varphi : S^n \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de la facon suivante. Pour tous $Q \in S^n$, divers de P, $\varphi(Q)$ est le (seul) point d'intersection entre la ligne determinée par les point P et Q et l'hyperplan d'équation $\{x_0 = 0\}$. En écrivant la formule explicite pour cette intersection la, on obtient

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \ldots, x_n).$$

On voit facilement que φ est bien définie, continue, bijective et avec inverse continue. Donc φ est un homeomorphisme. $\square$

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{PFlt}(X)$ l'ensembles des filtres propres sur X, partiellement ordonné par inclusion.

Exercice 4. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X, prouver que les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $\mathcal{F}$ est un élément maximal dans $\mathrm{PFlt}(X)$.

(b) Pour tout $A \subseteq X$, soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

En utilisant le lemme de Zorn, déduire que l'on peut étendre tout filtre en un ultrafiltre.

Preuve. "*(a)* $\Rightarrow$ *(b)*": Si $\mathcal{F}$ est maximal et $A \subseteq X$ avec $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, alors le filtre $\mathcal{F}^+$ engendré par $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est propre. À savoir: Parce que $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ on doit avoir $B \not\subseteq X \setminus A$ pour tout $B \in \mathcal{F}$, ce qui veut exactement dire $B \cap A \neq \varnothing$. Donc $\mathcal{F}^+$ est propre et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$. Mais $\mathcal{F}$ est maximal et donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$; i.e. $A \in \mathcal{F}$.

"*(b)* $\Rightarrow$ *(c)*": Si $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $B \notin \mathcal{F}$ alors, par hypothèse, $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Donc, on a aussi $(A \cup B) \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{F}$ et alors $A \in \mathcal{F}$, parce que $A \setminus B \subseteq A$.

"*(c)* $\Rightarrow$ *(a)*": Soit $\mathcal{G}$ un filtre propre avec $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{G}$. Parce que $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, on doit avoir soit $A \in \mathcal{F}$, soit $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Mais $X \setminus A \in \mathcal{F}$ est impossible parce que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, $A \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est un filtre propre.

Ad "déduire que...": L'ensemble $\mathrm{PFlt}(X)$ est ordonné par inclusion et si $C \subseteq \mathrm{PFlt}(X)$ est une chaine de filtres, alors $\mathcal{G} := \bigcup_{\mathcal{F} \in C} \mathcal{F}$ est une borne pour C (on vérifie facilement que $\mathcal{G}$ est un filtre propre). Par le lemme de Zorn, on peut étendre tout filtre en un filtre maximal (i.e. un ultrafiltre). $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Pour une chaîne $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \ldots$ de plongements, sa *colimite* est l'espace topologique X dont son ensemble sous-jacent est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si tout $U \cap X_n \subseteq X_n$ est ouvert. Montrer que

(a) ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$;

(b) $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé;

(c) si chaque $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ est un plongement fermé/ouvert alors chaque inclusion $i_n : X_n \hookrightarrow X$ est un plongement fermé/ouvert;

(d) si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute application continue $f : K \to X$ factorise par un i_n.
Indication: Trouver $Y = \{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq f(K)$ avec $x_n \notin X_n$ (pas forcément deux à deux distinct) et montrer que chaque $A \subseteq Y$ est fermé dans X.

Preuve.

(a) *ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$*; L'ensemble vide et X sont ouverts, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sous-ensembles $\varnothing \cap X_n = \varnothing$ et $X \cap X_n = X_n$ sont ouverts dans X_n.
Considère une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ dans X. Alors la réunion est ouverte, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble $(\bigcup_{i\in I} U_i) \cap X_n = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap X_n)$ est une réunion d'ouverts dans X_n.
Considère une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ dans X, avec I fini. Alors l'intersection est ouverte, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble $(\bigcap_{i\in I} U_i) \cap X_n = \bigcap_{i\in I}(U_i \cap X_n)$ est une intersection finie d'ouverts dans X_n.

(b) *Chaque inclusion $i_n : X_n \hookrightarrow X$ est un plongement*;
- i_n est clairement injective.
- i_n est continue, En effet, pour tout ouvert U dans X, $i_n^{-1}(U) = U \cap X_n$, ce qui est ouvert dans X_n.
- i_n est un homeomorphisme sur l'image. On montre que i_n est ouverte dans le cas où les plongements sont ouverts; l'autre est analogue. En effet, si U est un ouvert de X_n, alors:
  — pour tout $m \leq n$ on a que $U \cap X_m$ est ouvert dans X_m, puisque $i_{n,m} : X_m \hookrightarrow X_n$ est continue;
  — pour tout $m \geq n$ on a que $U \cap X_m = U \subseteq X_m$ est ouvert dans $i_{m,n}(X_n)$ puisque l'inclusion $i_{m,n} : X_n \hookrightarrow X_m$ est une composition de plongements ouverts, et donc elle l'est aussi.

  On vient de montrer que $i_n : X_n \longrightarrow i_n(X_n)$ est ouverte, et donc i_n est un homeomorphisme sur l'image.

(c) *$A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé*; $X \setminus A$ est ouvert si et seulment si $(X \setminus A) \cap X_n = X_n \setminus A = X_n \setminus (A \cap X_n)$ est ouvert dans X_n.

(d) *Si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, tout application continue $f : K \to X$ factorise par un i_n*; Supposons que f ne pactorise par aucun X_n. Ca veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ in existe x_n tel que n'appartient pas à X_n. Soit $Y := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a que:
- *Y est infini.* En fait s'il était fini, et $x_n \in X_{m_n}$, on aura que $Y \subset X_m$, pour $m := \max\{m_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mais x_m est un élément de Y et pas de X_m.

- *Chaque $A \subseteq Y$ est fermé dans X*; En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que
$$A \cap X_n \subseteq Y \cap X_n \subseteq \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$
et donc il est fini. Alors $A \cap X_n$ est fermé dans X_n, puisque X_1 est T_1. En utilisant le point (c), on déduit qu'un tel A est fermé.
- *Y est compact*; En fait, il est fermé dans X, et donc dans $f(K)$, ce qui est compact.
- *Y est discret*; en fait tous les complementaires des singletons sont fermés.

On a donc un espace topologique qui est infini, discret et compact, et ca est une contradiction. □

Exercice 2. (Heine-Borel) Montrer pour $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que $\big(K, (\mathcal{T}_{\text{st}})_K\big)$ est compact si et seulement si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et borné.
Indication: Utiliser qu'un intervalle fermé ainsi qu'un produit fini de compacts est compact.

Preuve.

[$\Longrightarrow$]; Supposons que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact. Alors on a que:

- K est borné; en effet, on peut récouvrir K avec la famille $\{B_{\mathbb{R}}(0,n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Par la compacité de K, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(0,N)$, c'est à dir que K est borné.
- K est ferm'e; en effet, $\mathbb{R}^n$ est d'Hausdorff, et donc n'importe quel compact est fermé.

[$\Longleftarrow$]; Supposons que K est fermé et borné. Alors pour quelque $N \in \mathbb{N}$ on a que
$$K \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(0,N) \subseteq [-N,N]^n \subseteq \mathbb{R}^n.$$
Ensuite, $[-N,N]^n$ est compact, parce que c'est un produit d'intervals fermés et bornés, ce qui sont compacts. Donc K est un fermé dans un compact, et alors il l'est aussi. □

Exercice 3. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, les énoncés suivants sont équivalents:

(a) $(X, \mathcal{T})$ est compact;

(b) tout filtre sur X a un point d'accumulation;

(c) tout ultrafiltre sur X converge.

Indication: Utiliser la PIF.

Preuve.

$(a) \Rightarrow (b)$ Soit $\mathcal{F}$ un filtre (propre) sur un espace topologique X compact. On considère la famille de fermés $S = \{\bar{M} : M \in \mathcal{F}\}$. Puisque $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies et ne contient pas l'ensemble vide (c'est un filtre propre), toute intersection finie d'éléments de S est non-vide. Par la caractérisation de la compacité pour les fermés, ceci veut dire que l'intersection de toute la famille est non vide, c'est-à-dire $\bigcap_{M \in \mathcal{F}} \overline{M} \neq \varnothing$. Par l'exercice 4 de la série 12, cet ensemble est l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{F}$. Puisqu'il est non vide, $\mathcal{F}$ a un point d'accumulation.

$(b) \Rightarrow (c)$ Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Par (b), il a un point d'accumulation. Puisque $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, par l'exercice 4 (b) de la série 5, tout point d'accumulation est aussi un point limite, et donc $\mathcal{U}$ converge.

$(c) \Rightarrow (a)$ Soit S une famille de fermés telle qu'une intersection finie d'éléments de S est non-vide. Alors, $\mathcal{F}_X(S)$ est un filtre propre. Par le théorème de l'ultrafiltre (série 13 exercice 4), il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F}_X(S) \subseteq \mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ converge, $\mathcal{U}$ a un point d'accumulation, c'est-à-dire il existe $x \in \bigcap_{M \in \mathcal{U}} \overline{M}$. En particulier, puisque $S \subseteq \mathcal{U}$, $x \in \bigcap_{F \in S} F$. Ceci montre que X vérifie la caractérisation par les fermés de la compacité. □

Exercice 4. Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si l'application unique vers un point $X \to *$ est propre (cf. série 13, exercice 1).
Indication: On a, pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, un espace topologique $Y := X + \{*\}$ dont les ouverts non-vides sont les $F + \{*\}$ avec $F \in \mathcal{F}$. Après, considérer la projection de l'adhérence de la "diagonale" $D := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

Preuve. Il s'agit de montrer la réciproque de l'exercice 1 de la série 13. Supposons donc que pour tout Y, la projection $X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée. On utilise l'exercice 3 et on va montrer que tout filtre $\mathcal{F}$ sur X admet un point d'accumulation.

On définit $Y_{\mathcal{F}} = X \sqcup \{*\}$ avec la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \{F \sqcup \{*\} : F \in \mathcal{F}\} \cup \{\varnothing\}$.

On considère D comme dans l'énoncé. Soit $\mathrm{pr}_2 : X \times Y_{\mathcal{F}} \longrightarrow Y_{\mathcal{F}}$ la projection sur la deuxième composante. Alors, $\mathrm{pr}_2(\bar{D})$ est fermé par hypothèse. Mais $X \subseteq \mathrm{pr}_2(\bar{D})$, et puisque $\{*\}$ n'est pas ouvert (le fitre $\mathcal{F}$ est propre), $\mathrm{pr}_2(\bar{D}) = Y_{\mathcal{F}}$.

Ceci implique l'existence de $x \in X$ tel que $(x, *) \in \bar{D}$. En particulier, pour tout voisinage ouvert U de x et tout $F \in \mathcal{F}$, $D \cap (U \times (F \sqcup \{*\})) \neq \varnothing$. Autrement dit, il existe $y \in X$ avec $y \in U$ et $y \in F$. Ceci montre que $U \cap F \neq \varnothing$, et donc x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 15

Exercice 1. Pour un espace métrique X, un point $x \in X$ et $\varnothing \neq M \subseteq X$, on définit

$$d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y), \qquad \text{la } \textit{distance} \text{ entre } x \text{ et } M.$$

Montrer que

(a) pour $\varnothing \neq M \subseteq X$ fixé, la fonction $d(-, M)\colon X \to \mathbb{R}$ est continue;

(b) $\overline{M} = \{x \in X \mid d(x, M) = 0\}$ pour tout $\varnothing \neq M \subseteq X$.

Preuve.

(a) On va montrer que $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |d(x, M) - d(y, M)| < \varepsilon$. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on a $d(x, M) \leqslant d(x, m)\ \forall m \in M$ par définition de l'infimum, de plus en appliquant l'inégalité du triangle on obtient $d(x, M) \leqslant d(x, y) + d(y, m)\ \forall m \in M$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $m \in M$, elle reste vraie en particulier pour l'infimum. On obtient donc $d(x, M) - d(y, M) \leqslant d(x, y) < \delta$. Il suffit donc de choisir $\delta := \varepsilon$ pour conclure. De la meme façon on montre que $d(y, M) - d(x, M) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta := \varepsilon$.

(b) Soit $x \in \overline{M}$, par caractérisation de l'adhérence par ouverts de base on a que pour tout $\varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $m \in M$ tel que $d(x, m) < \varepsilon$ et donc $d(x, M) = 0$. Conversement, soit $x \in \{x \in M \mid d(x, M) = 0\}$. Comme $d(x, M) = 0$, par propriétés de l'infimum on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in M$ tq $d(x, m) < \varepsilon$, ce qui implique $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$, et donc $x \in \overline{M}$ par la caractérisation. $\square$

Dans la preuve du théorème de Tychonoff on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois et on va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

Exercice 2. En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille d'ensembles non-vides $(X_i)_{i \in I}$ est non-vide (a.k.a. l'axiome du choix).
Indication: Munir chaque X_i de la topologie grossière, considérer $Y_i := X_i \amalg \{*\}$ et utiliser la PIF pour $\{A_i := \mathrm{pr}_i^{-1} X_i\}_{i \in I}$.

Preuve. On munit chaque Y_i de la topologie $\mathcal{T}_i := \{\varnothing, \{*\}, X_i, Y_i\}$ (facile de montrer que c'est bien une topologie). Comme cette topologie a seulement un nombre fini d'ouverts, l'espace $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ est compact et donc, par le théorème de Tychonoff, $Y := \prod_{i \in I} Y_i$ muni de la topologie produit l'est aussi. De plus $X_i = Y_i \setminus \{*\}$ est fermé dans Y_i, ce qui implique que $A_i := pr_i^{-1} X_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ est fermé car pr_i est continue per définition de la topologie produit. Montrons maintenant que $\{A_i\}_{i \in I}$ vérifie la PIF. Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini d'indices, on veut montrer que $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$. Comme tous les X_j sont non vides par hypothèse, on peut choisir un élément $x_j \in X_j$ pour tout $j \in J$ (Attention: ici on n'utilise pas l'axiome du choix car J est fini!). Considérons alors $\underline{x} \in Y$ tel que

$$\underline{x}(i) = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ * & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors clairement $\underline{x} \in \bigcap_{j \in J} A_j$ ce qui montre que cette intersection est non vide. Donc la collection $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ est une collection de fermés qui vérifie la PIF, comme Y est compact, par caractérisation de la compacité, on conclut que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Or $\prod_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$.

Exercice 3. (Théorème d'Alexandre) Soit $\mathcal{S}$ une sous-base pour la topologie d'un espace X. Si chaque recouvrement de X par ouverts de $\mathcal{S}$ admèt un sous-recouvrement fini, X est compact.
Indication: Preuve par absurde. Supposer qu'il y a un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X sans point-limite.

Preuve. Si les éléments de $\mathcal{S}$ ne recouvrent pas X, il y a un point $x \in X$ dont le seul voisinage est tout l'espace et alors X est compact (tout recouvrement ouvert de X doit contenir X). Supposons alors que les ouverts de sous-base recouvrent X et que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X sans point limite, ce qui veut dire que pour tout $x \in X$ on trouve un ouvert de base $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$) contenant x et $S_1 \cap \ldots \cap S_n \notin \mathcal{U}$. Parce que $\mathcal{U}$ est un filtre, on a même $S_i \notin \mathcal{U}$ pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$. En résumé, on a montré que pour tout $x \in X$, il y a un ouvert de sous-base contenant x qui n'est pas dans $\mathcal{U}$. Autrement dit, les ouverts de sous-base pas contenu dans $\mathcal{U}$ recouvrent X. Par hypothèse, on y trouve des ouverts de sous-base $S_1, \ldots, S_n$ pas dans $\mathcal{U}$ qui déjà recouvrent X, ce qui est absurde parce que $X = S_1 \cup \ldots \cup S_n \in \mathcal{U}$ mais $S_i \notin \mathcal{U}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Définition. Un ensemble totalement ordonné est *bien ordonné* ssi tout sous-ensemble non-vide a un minimum. On note qu'un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est aussi bien ordonné.

Théorème. Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Définition. On définit un ensemble bien ordonné Ω comme suit: Soit X un ensemble bien ordonné indénombrable (e.g. $\mathbb{R}$ muni d'un bon ordre arbitraire). Si chaque $\downarrow x := \{y \in X \mid y < x\}$ avec $x \in X$ est dénombrable, alors $\Omega := X$ et sinon, on trouve le plus petit $x \in X$ avec $\downarrow x$ indénombrable et on pose $\Omega := \downarrow x$.

Exercice 4. Montrer que

(a) $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact mais pas séquentiellement compact.

(b) Ω muni de la topologie d'ordre est séquentiellement compact mais pas compact.
Indication: Chaque suite dans Ω est bornée.

Preuve. Ad (a): L'espace $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ est compact par le théorème de Tychonoff. Pour montrer qu'il n'est pas séquentiellement compact, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $I^{\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ donnée par

$$f_n \colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to I,\ M \mapsto \begin{cases} 1 & n \in M \\ 0 & n \notin M. \end{cases}$$

Pour que une sous-suite $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictément croissante) converge, elle doit converger à chaque coefficient; i.e. tout les $\big(f_{n(k)}(M)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $M \subseteq \mathbb{N}$ doivent converger. Mais prenons par exemple

$$M := \{n(k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ pair}\} = \{n(0), n(2), n(4), \ldots\}$$

où $\big(f_{n(k)}(M)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ alterne entre 1 et 0.

Ad (b): L'espace Ω n'est certainement pas compact parce que les $[0, \alpha[$ avec $0 = \min \Omega$ et $\alpha \in \Omega$ forment un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini. À savoir, Ω n'a pas de maximum, parce ce que s'il y avait un maximum $M \in \Omega$, alors $\Omega = \downarrow M$, ce qui contredit notre définition, parce que Ω est indénombrable. Donc pour tout $\alpha \in \Omega$ il y a $\alpha < \alpha' \in \Omega$ et les $[0, \alpha[$ recouvrent Ω.

Par contre, Ω est séquentiellement compact parce que tout $M \subseteq \Omega$ dénombrable a un suprémum (soit le maximum de M, soit le minimum de $\Omega \setminus M \neq \varnothing$). Alors, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Ω, on prend $n(0) := 0$ et $n(k+1)$ le premier indice m avec $\alpha_m = \min_{n>n(k)} \alpha_n$. Donc

$$\alpha_{n(1)} \leqslant \alpha_{n(2)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n(k)} \leqslant \alpha_{n(k+1)} \leqslant \ldots$$

est une suite croissante et bornée, ce qui implique qu'elle converge vers $\sup_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{n(k)}$. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 16

Exercice 1. Montrer que chaque espace métrique compact est séquentiellement compact.

Preuve. Soit X un espace métrique compact et supposons par l'absurde qu'il n'est pas séquentiellement compact, c.à.d. qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que toute sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. On a deux cas à considérer:

Cas 1: $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Dans ce cas il existe un $x \in X$ tel que $x_n = x$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$. Mais alors on peut extraire une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant seulement le point x. Cette sous suite converge donc vers x, ce qui contredit notre hypothèse absurde.

Cas 2: $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$. Pour tout $y \in X$ il existe $r_y > 0$ tel que $\#B(y, r_y) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. En effet, si un tel r_y n'existait pas, on pourrait extraire une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers y. On considère alors le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{B(y, r_y) \mid y \in X\}$. Comme X est compact, ils existent $y_1, \ldots, y_m \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, r_{y_i}).$$

Chaque boule dans cette réunion ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, comme l'union est finie, X tout entier ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui contredit le fait que $\#(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$. □

Définition. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un espace X, son filtre associé est le filtre engendré par tout les $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour un espace topologique X, montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X avec un point d'accumulation $x \in X$, alors on peut étendre $\mathcal{F}$ en un ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui converge vers x.
Indication: Considérer $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{F}$.

(b) un point $x \in X$ est un point d'accumulation/point limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il l'est pour le filtre associé.

(c) si x est un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant le filtre associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergent vers x.

Preuve. (a) Soit $\mathcal{F}$ un filtre avec un point d'accumulation $x \in X$. Le filtre $\mathcal{F}_X(\mathcal{F} \cup \nu(x))$(non nécéssairement propre) engendré par $\mathcal{F} \cup \nu(x)$ peut être décrit comme

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}_X(\mathcal{F} \cup \nu(x)) = \{A \cap U \mid U \in \nu(X), A \in \mathcal{F}\}$$

En fait, c'est facile à voir que:

- *$\mathcal{G}$ et fermé par intersections finies.* Pour A, B in $\mathcal{F}$ et U, V voisinages de x on a

$$(A \cap U) \cap (B \cap V) = (A \cap B) \cap (U \cap V),$$

ce qui est dans $\mathcal{G}$.

- *$\mathcal{G}$ et fermé vers l'haute.* En fait, si $A \in \mathcal{F}$, $U \in \nu(x)$ et $S \supseteq A \cap U$, on peut écrir

$$S = (S \cup A) \cap (S \cup U),$$

ce qui est dans $\mathcal{G}$.

- $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{F} \cup \nu(x)$.
- Chaque filtre qui contient $\mathcal{F} \cup \nu(x)$ doit contenir $\mathcal{G}$.

Ensuite, $\mathcal{G}$ est propre. En effet, l'intersection d'un voisinage de x avec un element de $\mathcal{F}$ n'est jamais vide, lorsque x est d'accumulation pour $\mathcal{F}$.

Alors, on peut utiliser le Théorème de l'ultrafiltre pour étendre $\mathcal{G}$ à un ultrafiltre $\mathcal{H}$. Finalement, $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G} \supseteq (\mathcal{F} \cap \nu(x)) \supseteq \nu(x)$, et donc $\mathcal{H}$ converge vers x.

(b) Soit $x \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ une suite, et $\mathcal{F}$ le filtre lui associé. Notons que $\mathcal{F}$ peut eťre décrit aussi comme la collection des sous-ensembles de X qui contiennent les elements de la suite définitivement, c'est à dir ceux qui contiennent tous x_n pour n assez grand.

- *Si x est d'accumulation pour la suite, il l'est aussi pour le filtre.* Soit U un voisinage de x. Comme x est d'accumulation pour la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a un nombre infini d'indices k tels que x_k est dans U. Ca implique que pour tous $A \supseteq \{x_k\}_{k>N}$, on a que A intersecte U, et donc x est d'accumulation pour le filtre.
- *Si x est d'accumulation pour le filtre, il l'est aussi pour la suite.* Soit U un voisinage de x. Comme x est d'accumulation pour le filtre, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a que $U \cap \{x_k\}_{k>N}$ n'est pas vide. On définit par récurrence une suite, en choisissant comme indiqué:

  — $n_0 := 0$;

  — $n_{k+1} \in \{m > n_k \mid x_m \in U\}$, ce qui n'est pas vide comme $U \cap \{x_k\}_{k>n_k} \neq \varnothing$.

  Une telle $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien une sous-suite, et elle est contenue dans U. On a donc montré que x est d'accumulation pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *Si x est limite pour la suite, il l'est aussi pour le filtre.* Soit U un voisinage de x. Il y a $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour $n > N$, donc $U \supseteq \{x_n\}_{n>N}$ et $U \in \mathcal{F}$. Ca veut dir que $\mathcal{F}$ converge vers x.
- *Si x est limite pour le filtre, il l'est aussi pour la suite.* Soit U un voisinage de x, ce qui doit appartenir à $\mathcal{F}$. Alors U contient $\{x_n\}_{n>N}$, pour quelque $N \in \mathbb{N}$, et ca signifie que la suite est définitivement dans U. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

(c) En utilisant les points précedents, lorsque x est un point d'accumulation pour une suite, il l'est aussi pour le filtre associé, ce qu'on peut étendre à un ultrafiltre qui converge vers x. □

Définition. Un espace X est *paracompact* ssi tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X admet un raffinement ouvert localement fini où un recouvrement (ouvert) $\mathcal{V}$ est appelé

- un *raffinement (ouvert)* de $\mathcal{U}$ ssi chaque $V \in \mathcal{V}$ est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$;
- *localement fini* ssi tout $x \in X$ a un voisinage qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

Exercice 3. Montrer qu'un produit d'un espace paracompact et d'un espace compact est de nouveau paracompact. Similairement, si un produit $X \times Y$ est paracompact et $Y \neq \varnothing$ est T_1, alors X est paracompact.

Preuve.

(a) Soit X un espace paracompact et Y un espace compact. On va montrer que le produit est paracompact. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement du produit. On peut toujours le raffiner en $\mathcal{U}'$, qui contient seulement des ouverts de base. Comme Y est compact, pour tous $x \in X$ il y a $U_1^x \times V_1^x, \ldots, U_{n_x}^x \times V_{n_x}^x \in \mathcal{U}'$ tels que $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i^x \times V_i^x$. Pour $U_x := \bigcap_{i=1}^{n_x} U_i^x$ on a que $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i^x \times V_i^x$. Ensuite, $\{U_x\}_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert du paracompact X, et donc on peut le raffiner en $\mathcal{W}$ localement fini. Pour tout $W \in \mathcal{W}$ on choisit $x(W) \in X$ tel que $W \subseteq U_{x(W)}$. On peut finalement définir

$$\mathcal{N} := \{W \times V_i^{x(W)} \subseteq X \times Y \mid W \in \mathcal{W} \text{ et } i = 1, \ldots, n_{x(W)}\}.$$

On a que:

- $\mathcal{N}$ *recouvre* $X \times Y$: Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, comme $\mathcal{W}$ est un raffinement de $\{U_x\}_{x\in X}$, il existe $W \in \mathcal{W}$ avec $x \in W \subseteq U_{x(W)}$. Ensuite, il y a un $i \in \{1, \ldots, n_{x(W)}\}$ tel que $y \in V_i^{x(W)}$. Donc $(x, y) \in U_i^{x(W)} \times V_i^{x(W)}$.
- $\mathcal{N}$ *est bien un raffinement de* $\mathcal{U}'$*, et donc de* $\mathcal{U}$: Pour tout $W \in \mathcal{W}$ et $i = 1, \ldots, n_{x(W)}$, on a que
$$W \times V_i^{x(W)} \subseteq U_{x(W)} \times V_i^{x(W)} \subseteq U_i^{x(W)} \times V_i^{x(W)} \in \mathcal{U}'.$$
- $\mathcal{N}$ *est localement fini*: Pour $(x, y) \in X \times Y$, il existe un voisinage ouvert O de x qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{W}$. Alors $O \times Y$ est un voisinage de (x, y) qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{N}$. En fait, l'intersection
$$W \times V_i^{x(W)} \cap O \times Y = (W \cap O) \times \left(V_i^{x(W)} \cap Y\right) = (W \cap O) \times V_i^{x(W)}$$
est vide si et seulement si $W \cap O$ l'est. Cette condition est vérifiée seulement pour un nombre fini de W, pour lesquels seulment $W \times V_1^{x(W)}, \ldots, W \times V_{n_{x(W)}}^{x(W)}$ appartiennent à $\mathcal{N}$.

(b) En supposant que $Y \neq \varnothing$ est T_1 ou plus généralement, contient un point fermé $y \in Y$,
$$X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$$
est un sous-espace fermé d'un espace paracompact. Par l'exercice 2 (b) de la Série 17 (ou une vérification directe), X est aussi paracompact.

Remarque. Dans l'énoncé original du point (b), on a demandé de montrer que si $Y \neq \varnothing$ et $X \times Y$ est paracompact, alors X l'est aussi (sans demander que Y soit T_1). Cet énoncé est vrai mais la preuve n'est pas si facile que celle pour le cas où Y est T_1.

Preuve. On choisit $y \in Y$. En remplaçant $X \times Y$ par $X \times \overline{\{y\}}$ (ce qui est un sous-espace fermé de $X \times Y$ et donc paracompact), on peut supposer, sans perte de généralité, que $\overline{\{y\}} = Y$ (on dit que y est un *point générique* de Y). Maintenant, soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de X. On choisit un raffinement ouvert localement fini $\mathcal{W}'$ du recouvrement ouvert

$$\mathcal{W} \times Y := \{W \times Y \mid W \in \mathcal{W}\} \qquad \text{de } X \times Y$$

et on aimerait montrer que $\mathrm{pr}_X \mathcal{W}' := \{\mathrm{pr}_X W \mid W \in \mathcal{W}'\}$ est un raffinement ouvert localement fini de $\mathcal{W}$. Parce que $\mathcal{W}'$ est un raffinement ouvert de $\mathcal{W} \times Y$ et la projection pr_X est ouverte, $\mathrm{pr}_X \mathcal{W}'$ est certainement un raffinement ouvert de $\mathcal{W}$ et il faut juste montrer qu'il est localement fini. Alors, soit $x \in X$ quelconque. Par définition de $\mathcal{W}'$, ils existent $U \ni x$, $V \ni y$ ouverts, tels que $U \times V$ intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{W}'$ et on va montrer que U intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathrm{pr}_X \mathcal{W}'$. Par absurde, supposons le contraire. Ça veut dire qu'il existe $\mathcal{W}'' \subseteq \mathcal{W}'$ (infini) tel que

$$\{\mathrm{pr}_X W \mid W \in \mathcal{W}''\} \text{ est infini et } U \cap \mathrm{pr}_X W \neq \varnothing \text{ pour tout } W \in \mathcal{W}''.$$

Mais maintenant, pour $W \in \mathcal{W}''$, on choisit $x' \in U \cap \mathrm{pr}_X W$ et

$$W \cap (\{x'\} \times Y) \neq \varnothing \qquad \square$$

est ouvert dans $\{x'\} \times Y \cong Y$. Parce que y est un point générique de Y, on doit avoir $(x', y) \in W \cap (\{x'\} \times Y)$ et donc $(x', y) \in W \cap (U \times V)$. Alors, on a montré que $W \cap (U \times V) \neq \varnothing$ pour tout $W \in \mathcal{W}''$, ce qui est une infinité d'éléments de $\mathcal{W}$ et donc absurde. $\square$

Exercice 4. (Théorème de A. H. Stone) Montrer qu'un espace métrisable est paracompact.

Indication: Par le théorème de la série précédente, on peut toujours indicer un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ par un ensemble bien ordonné I. Alors, pour chaque $x \in X$ il y a $m(x) \in I$ minimal avec $x \in U_{m(x)}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{>0}$ on définit des ouverts $\{V_i^n\}_{i \in I}$ comme suit: Chaque V_i^n est la réunion des $B(x, 2^{-n})$ tels que

(a) $i = m(x)$;   (b) $x \notin V_j^m$ pour tous $m < n$, $j \in I$;   (c) $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_i$.

Maintenant, il faut montrer que $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0},\, i \in I}$ est un raffinement ouvert de $\mathcal{U}$ qui est localement fini. Pour la vérification du dernier point, on prend pour chaque $x \in X$ le $i \in I$ minimal tel que $x \in V_i^n$ pour un $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (que l'on fixe aussi). En choisissant $k \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$, on montre que la boule $B(x, 2^{-(n+k)})$ intersecte seulement un nombre fini de V_j^m en montrant que

(1) pour $m \geqslant n + k$, elle ne l'intersecte pas;

(2) pour $m < n + k$, elle l'intersecte pour au plus un $j \in I$.

D'abord, $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0},\, i \in I}$ est bien un recouvrement parce que si $x \in X$, alors $x \in U_{m(x)}$ et il existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_{m(x)}$. Par définition, on a $x \in V_{m(x)}^n$ ou $x \in V_i^k$ pour quelques $k < n$, $i \in I$. De plus, $\{V_i^n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ est bien un raffinement de $\mathcal{U}$ par définition de V_i^n et parce que $B(x, 2^{-n}) \subseteq B(x, 3 \cdot 2^{-n})$. Montrons maintenant que ce recouvrement est bien localement fini en montrant (1) et (2) de l'indication.
Ad (1): Pour $m \geqslant n + k$, on note que V_j^m est une union de boules $B(y, 2^{-m})$ où $y \notin V_i^n$ par (b). Parce que $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_i^n$ on a $d(x, y) \geqslant 2^{-k}$ et donc $B(x, 2^{-(n+k)}) \cap B(y, 2^{-m}) = \varnothing$, car

$$d(x, y) \geqslant 2^{-k} = 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} \geqslant 2^{-(n+k)} + 2^{-m}.$$

Ad (2): Pour $m < n + k$, $j < j' \in I$ et $y \in V_j^m$, $y' \in V_{j'}^m$ on trouve y_0, $y_0' \in X$ qui satisfont (a), (b), (c) ci-dessus avec $y \in B(y_0, 2^{-m})$, $y' \in B(y_0', 2^{-m})$. Mais maintenant, $B(y_0, 3 \cdot 2^{-m}) \subseteq U_j$ par (c) et $y_0' \notin U_j$ par (a). Donc, $d(y_0, y_0') \geqslant 3 \cdot 2^{-m}$ et alors

$$d(y, y') \geqslant d(y_0, y_0') - 2 \cdot 2^{-m} \geqslant 3 \cdot 2^{-m} - 2 \cdot 2^{-m} = 2^{-m},$$

ce qui implique que l'on ne peut pas avoir y, $y' \in B(x, 2^{-(n+k)})$ en même temps.

TOPOLOGIE - SÉRIE 17

Exercice 1. Montrer que

(a) $\mathbb{R}_K$ n'est pas régulier;

(b) $\mathbb{R}_l$ est normal;

(c) $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ est régulier.

Preuve. Ad (a): Par définition de la topologie sur $\mathbb{R}_K$, l'ensemble

$$K := \{1/n \in \mathbb{R}_K \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

est fermé et on ne peut pas séparer 0 et K. En fait, si U, $V \subseteq \mathbb{R}_K$ sont ouverts avec $0 \in U$ et $K \subseteq V$ il y a a, $b \in \mathbb{R}_K$ tels que $0 \in \,]a, b[\, \setminus K \subseteq U$. De plus, il y a $n \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $1/n < b$ et comme $1/n \in K$ on trouve a', $b' \in \mathbb{R}_K$ tels que $1/n \in \,]a', b'[\, \subseteq V$. Mais maintenant

$$\varnothing \neq (]a, b[\setminus K) \cap \,]a', b'[\, \subseteq U \cap V.$$

Ad (b): Deux A, $B \subseteq \mathbb{R}_l$ fermés et disjoints peuvent être séparés par

$$A \subseteq U := \bigcup_{a \in A} \bigcup_{x \in X_a} [a, x[\qquad \text{et} \qquad B \subseteq V := \bigcup_{b \in B} \bigcup_{y \in Y_b} [b, y[$$

où $X_a := \{x \in X \mid [a, x[\cap B = \varnothing\}$ et $Y_b := \{y \in X \mid [b, y[\cap A = \varnothing\}$ (pour $a \in A$ et $b \in B$), qui sont clairement non vides, car A et B sont fermés et disjoints. Les ensembles U et V sont disjoints, parce que si on suppose que l'on a $z \in U \cap V$, il y a $a \in A$, $x \in X_a$, $b \in B$ et $y \in Y_b$ tels que $z \in [a, x[\cap [b, y[$. Donc $b < x$ (i.e. $b \in [a, x[$), ce qui contredit la définition de X_a.
Ad (c): L'espace $\mathbb{R}_l$ est normal (en particulier régulier) et un produit d'espaces réguliers est régulier. □

Exercice 2. Soit X un espace topologique.

(a) Si X est de Hausdorff, on sait qu'un sous-espace compact $A \subseteq X$ est forcément fermé. Est-ce que c'est aussi vrai pour A paracompact?

(b) Si X est paracompact et $A \subseteq X$ fermé, alors A est paracompact aussi.

(c) **(Dieudonné)** Un espace paracompact et de Hausdorff est normal.
Indication: D'abord montrer la régularité.

(a) Non, en effet il suffit de considérer $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ (qui est bien de Hausdorff) et un sous-ensemble ouvert $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $(]a, b[, (\mathcal{T}_{st})_{]a,b[})$ est un espace métrique. Par le théorème de Stone (exercice 4, série 16) on conclut que $(]a, b[, (\mathcal{T}_{st})_{]a,b[})$ est paracompact, mais il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

(b) *Preuve.* Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_A$ (où $\mathcal{T}$ est la topologie de X) un recouvrement ouvert de A (i.e. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$). Par définition de la topologie du sous-espace on sait que pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $V_U \in \mathcal{T}$ tel que $U = V_U \cap A$. On considère la collection $\mathcal{V} = \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus A\}$. Comme

$$(1) \quad \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_U\right) \cup (X \setminus A) \supseteq \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) \cup (X \setminus A) \supseteq A \cup (X \setminus A) = X,$$

on conclut que $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. On considère la collection $\mathcal{O} = \{W \cap A \mid W \in \mathcal{W}\} \subseteq \mathcal{T}_A$. Alors

$$\bigcup_{W \in \mathcal{W}} (W \cap A) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \cap A = X \cap A = A,$$

ce qui montre que $\mathcal{O}$ est un recouvrement ouvert de A. On va montrer maintenant que $\mathcal{O}$ est un raffinement localement fini de $\mathcal{U}$.

Raffinement: Soit $O \in \mathcal{O}$, alors $O = W \cap A$ pour un certain $W \in \mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}$ est un raffinement de $\mathcal{V}$, il existe un $U \in \mathcal{U}$ tel que $W \subseteq V_U$. Donc on a $O = W \cap A \subseteq V_U \cap A = U \in \mathcal{U}$, ce qui montre que $\mathcal{O}$ est bien un raffinement de $\mathcal{U}$.

Localement fini: Soit $a \in A \subseteq X$. Alors, comme $\mathcal{W}$ est localement fini, il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ tel que $a \in U$ et U intersecte seulement un nombre fini de $W \in \mathcal{W}$. Alors $a \in U \cap A \in \mathcal{T}_A$ est tel qu'il intersecte seulement un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{O}$, ce qui montre que $\mathcal{O}$ est localement fini. □

(c) *Preuve.* Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace paracompact et de Hausdorff.

- On va d'abord prouver que X est régulier. Soit $x \in X$, et $A \subseteq X$ fermé tel que $x \notin A$. Comme X est de Hausdorff, pour tout $y \in A$ ils existent des ouverts $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U_y, y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \varnothing$. Alors $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$, et donc, par un calcul analogue à (1), on conclut que $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. On enlève à $\mathcal{W}$ tout ensemble qui n'intersecte pas A et on obtient une collection $\mathcal{O}$ localement finie telle que tout $O \in \mathcal{O}$ est contenu dans un $V_y \in \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{O}$ est localement fini, il existe un ouvert $W \in \mathcal{T}$ tel que $x \in W$ et W intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$. Soit maintenant $T \subseteq A$ un sous-ensemble fini de A qui contient pour chaque $O \in \mathcal{O}$ un y tel que $O \subseteq V_y$. on pose alors
$$U = W \cap \bigcap_{y \in T} U_y, \text{ et } V = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O.$$
Alors $x \in U$, $A \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un $z \in U \cap V$. Comme $z \in V$, il existe un $O \in \mathcal{O}$ tel que $z \in O$. De plus, comme $z \in U$, on sait que $z \in U_y$ pour tout $y \in A$. Mais comme il existe un $y \in A$ tel que $O \subseteq V_y$, on conclut que $z \in V_y \cap U_y = \varnothing$, ce qui est un contradiction.
- On montre maintenant la normalité. Soient $A, B \subseteq X$ des ensembles fermés dans X. Comme X est régulier par le point précédent, pour tout $a \in A$ ils existent des ouverts $U_a, V_a \in \mathcal{T}$ t.q. $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ et $U_a \cap V_a = \varnothing$. La collection $\mathcal{U} = \{U_a \cap A \mid a \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A. On pose alors $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ qui est un recouvrement ouvert de X par un calcul analogue à (1). Comme X est paracompact, il existe un raffinement localement fini $\mathcal{W}$. Encore une fois, on enlève à $\mathcal{W}$ tous les ensembles qui n'intersectent pas A, et on obtient une collection localement finie d'ouverts $\mathcal{O}$, chacun contenu dans un certain U_a, qui recouvre A. On pose alors
$$C = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{T}.$$
Comme $\mathcal{O}$ est localement finie, pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $W_b \in \mathcal{T}$ tel que $b \in W_b$ qui intersecte seulement un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$. Soit $T \subseteq A$ un sous ensemble fini de A qui contient pour tout $O \in \mathcal{O}$ un point a tel que $O \in U_a$. Alors on définit l'ouvert
$$Q_b = W_b \cap \bigcap_{a \in T} V_a \in \mathcal{T}.$$
Cet ouvert n'intersecte pas C par un raisonnement analogue à la fin de la preuve de la régularité. Il suffit donc de définir
$$Q = \bigcup_{b \in B} Q_b \in \mathcal{T}$$

pour obtenir que $A \subseteq C$, $B \subseteq Q$ et $C \cap Q = \varnothing$. $\square$

Définition. Une application continue $f\colon X \to Y$ est appelée *propre* ssi pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$, $(x,z) \mapsto (fx, z)$ est fermée. Si de plus, f est surjective, on dit que f est un *quotient propre* ou *parfaite*.

Exercice 3. Pour une application continue $f\colon X \to Y$, montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

(a) f est propre;

(b) f est fermée et ses fibres $f^{-1}y$ avec $y \in Y$ sont compactes;

(c) si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X et $y \in Y$ un point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$, alors il existe un point d'accumulation $x \in X$ de $\mathcal{F}$ tel que $fx = y$;

(d) si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X et $y \in Y$ un point limite de $f_*\mathcal{U}$, alors il existe un point limite $x \in X$ de $\mathcal{U}$ tel que $fx = y$.

Indication: Pour "(a) $\Rightarrow$ (b)", montrer que chaque $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est propre et utiliser l'exercice 4 de la série 14. Pour "(d) $\Rightarrow$ (a)", montrer que si on a une famille d'applications continues $(f_i)_{i\in I}$ dont chacune vérifie (d), alors le produit $\prod_{i\in I} f_i$ vérifie (d) aussi. Ensuite, il suffit de montrer qu'une application qui vérifie (d) est fermée.

Preuve. "*(a) $\Rightarrow$ (b)*": En prenant $Z = \{*\}$ dans la définition, on voit qu'une application propre est fermée. Maintenant, si f est propre et $y \in Y$, on va montrer que $f\colon f^{-1}y \to \{y\}$ est aussi propre et conclure par l'exercice 4 de la série 14. Alors, soit Z un espace et $A \subseteq (f^{-1}y) \times Z$ fermé. Il existe $A' \subseteq X \times Z$ fermé avec $A' \cap ((f^{-1}y) \times Z) = A$ et par propreté de f, $(f \times \mathrm{id}_Z)A' \subseteq Y \times Z$ est fermé. Finalement,

$$\begin{aligned}
(f \times \mathrm{id}_Z)A &= (f \times \mathrm{id}_Z)\Big(A' \cap ((f^{-1}y) \times Z)\Big) = \Big\{(fx, z) \;\Big|\; (x,z) \in A' \cap ((f^{-1}y) \times Z)\Big\} \\
&= \Big\{(fx, z) \;\Big|\; (x,z) \in A' \text{ et } x \in f^{-1}y\Big\} = \{(fx,z) \mid (x,z) \in A' \text{ et } fx = y\} \\
&= ((f \times \mathrm{id}_Z)A') \cap (\{y\} \times Z)
\end{aligned}$$

est fermé dans $\{y\} \times Z$.

"*(b) $\Rightarrow$ (c)*": On se souvient que $f_*\mathcal{F}$ est le filtre engendré par la base de filtre $\{fM \mid M \in \mathcal{F}\}$. Parce que chaque $N \in f_*\mathcal{F}$ contient un fM avec $M \in \mathcal{F}$, les point d'accumulation de $f_*\mathcal{F}$ sont

$$\bigcap_{N \in f_*\mathcal{F}} \bar{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} \overline{fM} = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} f\overline{M},$$

où, pour la dernière égalité on a utilisé que f est fermée. Maintenant, si $f_*\mathcal{F}$ possède un point d'accumulation $y \in \bigcap_{M\in\mathcal{F}} f\overline{M}$, les $\overline{M} \cap f^{-1}y$ sont non-vides et $\{\overline{M} \cap f^{-1}y \mid M \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre sur $f^{-1}y$. Mais $f^{-1}y$ est compact et donc ce filtre possède un point d'accumulation; i.e. $\bigcap_{M\in\mathcal{F}}(\overline{M} \cap f^{-1}y)$ est non-vide.

"*(c) $\Rightarrow$ (d)*": Triviale.

"*(d) $\Rightarrow$ (a)*": En supposant l'indiction et en observant que f et id_Z (où Z est un espace quelconque) vérifient (d), il suffit de montrer qu'une application continue vérifiant (d) est fermé. Alors soit $f\colon X \to Y$ une application continue qui vérifie (d), $A \subseteq X$ fermé et montrons $fA = \overline{fA} =: B$, où l'inclusion "$\subseteq$" est par la continuité de f. Pour la réciproque, soit $y \in B$, ce qui veut dire que $V \cap fA \neq \varnothing$ pour tout voisinage ouvert $V \in \mathcal{N}(y)$ de y. Donc,

$$\Big\{f^{-1}V \;\Big|\; V \in \mathcal{N}(y)\Big\} \cup \{A\}$$

engendre un filtre propre que l'on étend en un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Mais maintenant, $f_*\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur Y et parce que $\mathcal{N}(y) \subseteq f_*\mathcal{U}$, il converge vers y. Par hypothèse, il existe $x \in f^{-1}y$ avec $\mathcal{U} \to x$. Mais $A \in \mathcal{U}$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

Ad "Indication": Soit $(f_i\colon X_i \to Y_i)_{i\in I}$ une famille d'applications où chacune vérifie (d) et soit $f := \prod_{i\in I} f_i$. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\prod_{i\in I} X_i$ avec $f_*\mathcal{U}$ convergent vers un $y = (y_i)_{i\in I}$, alors chaque $(\mathrm{pr}_i)_*f_*\mathcal{U} = (f_i)_*(\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, convergent vers y_i. Par l'hypothèse et l'axiome du choix, on choisit, pour chaque $i \in I$, un $x_i \in X_i$ avec $fx_i = y_i$ et $(\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{U} \to x_i$. Mais ça veut exactement dire que $\mathcal{U} \to (x_i)_{i\in I}$ et on conclut. □

Exercice 4. Soit $p\colon X \to Y$ un quotient propre. Montrer que

(a) si X est de Hausdorff/régulier, alors Y l'est aussi;
Indication: Si $g\colon X \to Y$ est continue et fermée, $M \subseteq Y$ et $U \subseteq X$ un voisinage ouvert de $g^{-1}M$, alors il existe un voisinage ouvert V de M avec $g^{-1}V \subseteq U$.

(b) si Y est compact, alors X l'est aussi.

Preuve. Ad (a): Soit y, $y' \in Y$ deux points différents. Par le premier lemme au-dessous on peut séparer $p^{-1}y$ et $p^{-1}y'$ par deux ouverts, disons U et V, et par le deuxième lemme, pU et pV sont des voisinages disjoints de y et y'.
Ad (a'): Soit $U \subseteq Y$ ouvert et $y \in U$ (donc $p^{-1}y \subseteq p^{-1}U$). Par la régularité de X,

$$\left\{V \subseteq X \,\middle|\, V \text{ ouvert et } \overline{V} \subseteq p^{-1}U\right\}$$

est un recouvrement ouvert de $p^{-1}y$ et on peut choisir des ouverts $V_1, \cdots, V_n \subseteq Y$ tels que

$$p^{-1}y \subseteq V := V_1 \cup \cdots \cup V_n \subseteq \overline{V} = \overline{V_1} \cup \cdots \cup \overline{V_n} \subseteq p^{-1}U.$$

Mais alors pV est un voisinage de y et parce que p est fermée

$$y \in pV \subseteq \overline{pV} = p\overline{V} \subseteq pp^{-1}U = U.$$

Ad (b): Note que une composition d'applications fermées est fermée, donc une composition d'applications propres est toujours propre. L'application constante $Y \to \{\star\}$ est la composition suivante:

$$X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow \{\star\}\,,$$

où p est propre par hypothèse et $Y \to \{\star\}$ l'est parce que Y est compacte. Donc elle est propre aussi, et X est compacte. □

Lemme. Tous sous-ensembles compacts et disjoints A, B d'un espace de Hausdorff X peuvent être séparé par des ouverts.

Preuve. Considérons d'abord le cas où $A = \{a\}$. Là, en considérant le recouvrement ouvert

$$\{V \subseteq X \mid V \text{ ouvert et il existe un voisinage ouvert } U \text{ de } a \text{ avec } U \cap V = \varnothing\}$$

de B, on trouve des ouverts $U_1, \cdots, U_n \subseteq X$ et $V_1, \cdots, V_n \subseteq X$ tels que

$$a \in U_1 \cap \cdots \cap U_n =: U, \quad B \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n =: V \quad \text{et} \quad U_i \cap V_i = \varnothing \text{ pour tous } i.$$

En particulier, $U \cap V = \varnothing$ et on a séparé A et B. Si A n'est pas un singleton, alors en utilisant le cas précédent, on a un recouvrement ouvert de A donné par

$$\{U \subseteq X \mid U \text{ ouvert et il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } B \text{ avec } U \cap V = \varnothing\}\,.$$

Donc, on trouve encore une fois des ouverts $U_1, \cdots, U_n \subseteq X$ et $V_1, \cdots, V_n \subseteq X$ tels que

$$A \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: U, \quad B \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_n =: V \quad \text{et} \quad U_i \cap V_i = \varnothing \text{ pour tous } i.$$

En particulier, $U \cap V = \varnothing$ et on a fini. □

Lemme. Soit $p\colon X \to Y$ une application fermée. Si $S \subseteq Y$ et $U \subseteq X$ est un ouvert qui contient $p^{-1}S$, alors il y a aussi un ouvert $V \subseteq Y$ tel que $S \subseteq V$ et $p^{-1}V \subseteq U$. En particulier, si p est surjectif, l'image d'un voisinage de $p^{-1}S$ par p est un voisinage de S.

Preuve. Le sous-ensemble $A := p(X \setminus U) \subseteq Y$ est fermé parce que p est fermée, et donc $V := Y \setminus A$ est ouvert. Maintenant, comme $p^{-1}S \subseteq U$, nous avons que $S \subseteq V$. Ensuite

$$p^{-1}V = p^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus p^{-1}A = X \setminus p^{-1}p(X \setminus U) \subseteq U.$$

□

TOPOLOGIE - SÉRIE 18

Définition. Un sous-ensemble d'un espace topologique est G_δ ssi on peut l'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 1. Dans un espace normal X, montrer qu'un fermé $A \subseteq X$ est G_δ si et seulement s'il existe $f\colon X \to I$ continue tel que $fA \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$. Conclure que pour deux fermés A, $B \subseteq X$ disjoints qui sont G_δ, il existe $f\colon X \to I$ tel que $A = f^{-1}\{0\}$ et $B = f^{-1}\{1\}$.
Indication: Pour l'implication "$\Rightarrow$", écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (où chaque U_n est ouvert) et choisir des applications d'Urysohn f_n pour A et $X \setminus U_n$.

Preuve. Soit $A \subseteq X$ un fermé G_δ. Alors il existe une collection $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts de X telle que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$. Par le lemme de Urysohn, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $f_n\colon X \to I$ telle que $f_n(x) = 0 \ \forall x \in A$ et $f_n(x) = 1 \ \forall x \in X \setminus U_n$ (car $X \setminus U_n$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose alors $f\colon X \to I$, définie par

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Cette fonction est bien définie parce que

$$0 \leqslant f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n(x)}{2^n} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Elle est continue parce que la série converge uniformément par le critère de Weierstrass (le "M-test"). Alors on a $x \in A \Leftrightarrow f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(x) = 0$ (car $f(x)$ est une somme de termes positifs). Donc $f(A) \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$.

Pour la réciproque, supposons qu'il existe une fonction f comme dans l'énoncé. Comme $f(A) \subseteq \{0\}$ et $f(X \setminus A) \subseteq]0,1]$, on a $f(A) = \{0\}$ (sauf si $A = \varnothing$, où le résultat est trivial), donc

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right),$$

ce qui est bien une intersection dénombrable d'ouverts de X car f est continue et les $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ sont des ouverts dans I. Donc A est bien G_δ.

Maintenant, soient $A, B \subseteq X$ deux fermés et disjoints qui sont G_δ. Alors par ce qu'on vient de montrer on a l'existence de deux fonctions f, $g\colon X \to I$ telles que $A = f^{-1}(0)$, $B = g^{-1}(1)$ et par Urysohn, il existe $h\colon X \to I$ avec $h(A) \subseteq \{0\}$ et $h(B) \subseteq \{1\}$. Maintenant, on définit $F\colon X \to I$ par

$$F(x) := \frac{\max\{f(x), h(x)\} + \min\{g(x), h(x)\}}{2}.$$

Cette fonction est continue et bien définie (car $f + g \neq 0$ vu que $A \cap B = \varnothing$). De plus, on voit facilement que $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$. □

Exercice 2. (Compactifié de Stone-Čech) Pour un espace topologique X, on note $C(X, I)$ l'ensemble des applications continues $X \to I$ et on considère

$$h_X\colon X \to I^{C(X,I)},\ x \mapsto (fx)_{f\in C(X,I)}.$$

Le *compactifié de Stone-Čech* de X est $\beta X := \overline{h_X X}$, ce qui est compact par le théorème de Tychonoff. En notant $\eta_X\colon X \to \beta X$ l'application induite par h_X, montrer que

(a) X est complètement régulier ssi η_X (ou h_X) est un plongement;
Indication: Un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.

(b) pour $f\colon X \to Y$ continue, il existe une unique application continue $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ telle que $\beta f \circ \eta_X = \eta_X \circ f$;
Indication: Pour l'unicité, il faut se souvenir que βY est de Hausdorff et que deux applications continues vers un espace de Hausdorff coïncident, s'ils coïncident sur un sous-ensemble dense.

(c) si X est compact de Hausdorff, alors η_X est un isomorphisme;

(d) si K est compact de Hausdorff et $f\colon X \to K$ continue, il existe une unique application continue $f^\flat\colon \beta X \to K$ telle que $f^\flat \circ \eta_X = f$.

(a) [$\Longrightarrow$]; On va montrer que $h := h_X$ est un plongement, lorsque X est complètement régulier. Pour l'injectivité, considérons deux points différents x et y. Comme X est d'Hausdorff, le singleton $\{y\}$ est fermé. Maintenant on peut séparer x et $\{y\}$ par une fonction continue $f\colon X \to I$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Alors on a que

$$h(x)(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = h(y)(f),$$

ce qui montre que $h(x) \neq h(y)$. Ensuite il faut montrer que $h\colon X \to h(X)$ est ouverte. Soit $U \subseteq X$ un ouvert, et $x \in U$. Comme X est complètement régulier, on peut séparer x et $X \setminus U$ par une application continue $f\colon X \to I$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in X \setminus U$. On a que

$$h(x) \in \mathrm{pr}_f^{-1}(]0, 1]) \cap h(X) \subseteq h(U).$$

Comme $\mathrm{pr}_f^{-1}(]0, 1])$ est ouvert, il suit que $h(U)$ est ouvert dans $h(X)$.

[$\Longleftarrow$]; On remarque que $I^{C(X,I)}$ est compact et de Hausdorff, comme I l'est, et donc il est normal et complètement régulier. X est homéomorphe à $h(X)$, ce qui est un sous-espace du complètement régulier $I^{C(X,I)}$, donc il l'est aussi.

On va montrer qu'un sous-espace Z d'un espace complètement régulier Y l'est aussi. Soit $z \in Z$ et $F = A \cap Z$ un fermé de Z, avec A fermé dans A et tel que $z \notin F$. Alors $z \notin F$, et on peut les séparer par une application continue $f : Y \longrightarrow I$ tel que $f(z) = 1$ et $f(w) = 0$ pour $w \in A$. La restriction $f|_Z$ alors sépare z et F.

(b) Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. On définit $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ par

$$\beta f(F)\colon g \mapsto F(g \circ f).$$

L'application βf est continue parce que pour n'importe quel $g \in C(Y, I)$, $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ et $F \in I^{C(X,I)}$, si $\beta f(F)$ appartient à $\mathrm{pr}_g^{-1}(]a, b[)$, alors F appartient à $\mathrm{pr}_{g\circ f}^{-1}(]a, b[)$, et

$$\beta f(\mathrm{pr}_{g\circ f}^{-1}(]a, b[)) \subseteq \mathrm{pr}_g^{-1}(]a, b[)$$

Ensuite, pour $a \in X$ et $g \in C(Y, I)$ on a que

$$(\beta f \circ \eta_X(x))(g) = (\beta f(h(x)))(g)$$

$$= h(x)(g \circ f) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = h(f(x))(g) = ((\eta_Y \circ f)(x))(g).$$

On a bien montré que $\beta f \circ \eta_X(x) = \eta_Y \circ f(x)$, et donc $\beta f \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$.

(c) Lorsque X est compact et de Hausdorff, il est complètement régulier, et donc $h(X)$ est homéomorphe à X, ce qui est compact. Mais alors $h(X)$ est un sous-espace compact dans l'espace de Hausdorff $I^{C(X,I)}$, et donc il est fermé. Ca veut dire que X est homéomorphe à $\beta X = h(X)$ par le plongement η_X.

(d) Pour tout $f : X \longrightarrow K$ tel que K est compact de Hausdorff, on peut définir $f^b := \eta_K^{-1} \circ \beta f$. Une telle application est continue et ensuite

$$f^b \circ \eta_X = \eta_K^{-1} \circ \beta f \circ \eta_X = \eta_K^{-1} \circ \eta_K \circ f = f.$$

Une telle définition est obligatoire. En fait, par l'unicité du point (b), si f^b satisfait $f^b \circ \eta_X = f$, alors $\eta_K \circ f^b \circ \eta_X = \eta_K \circ f$, et donc $\beta f = \eta_K \circ f^b$.

Définition. Le *support* d'une application $f \colon X \to \mathbb{R}$ (où X est un espace topologique) est

$$\operatorname{supp} f := \overline{f^{-1}\mathbb{R}^\times} = \overline{\{x \in X \mid fx \neq 0\}}.$$

Une *partition d'unité* sur X est une famille d'applications $(\varphi_j \colon X \to I)_{j \in J}$, telle que $(\operatorname{supp} \varphi_j)_{j \in J}$ est localement fini (i.e. tout $x \in X$ admet un voisinage U tel que $\{j \in J \mid U \cap \operatorname{supp} \varphi_j \neq \varnothing\}$ est fini) et $\sum_{j \in J} \varphi_j x = 1$ pour tous $x \in X$ (cette somme est finie par la première condition). Si, pour une telle partition d'unité, $(U_j)_{j \in J}$ est un recouvrement de X on dit que $(\varphi_j)_{j \in J}$ est *subordonnée* à $(U_j)_{j \in J}$ ssi $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Finalement, si pour un recouvrement $(U_j)_{j \in J}$ il existe une partition d'unité subordonnée à $(U_j)_{j \in J}$ on dit qu'il est *numérable*.

Exercice 3. Soit X un espace paracompact de Hausdorff. Montrer que

(a) si $(U_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j \in J}$ tel que $\overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$;

(b) un recouvrement $(U_j)_{j \in J}$ est numérable s'il existe une famille $(\varphi_j \colon X \to I)_{j \in J}$ d'applications continues, telle que $(\operatorname{supp} \varphi_j)_{j \in J}$ est localement fini, $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j \in J} \varphi_j \colon X \to \mathbb{R}$ est strictement positive;

(c) chaque recouvrement ouvert de X est numérable.
Indication: Utiliser (a) pour trouver deux recouvrements ouverts localement finis $(V_j)_{j \in J}$, $(W_j)_{j \in J}$ tels que $\overline{W}_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$ et utiliser le lemme d'Urysohn.

Preuve.

(a) D'abord on utilise la régularité de X (X est en effet normal comme il est paracompact et d'Hausdorff), et pour tout $x \in X$ et $i \in I$ on choisit un ouvert $V_{x,i}$ tel que $x \in V_{x,i} \subseteq \overline{V}_{x,i} \subseteq U_i$. Ensuite, on peut raffiner $(V_{x,i})_{x,i}$ en un recouvrement localement fini $\mathcal{V}$, ce qui est equippé d'une fonction $V \mapsto (x(V), i(V))$, tel que $V \subseteq V_{x(V),i(V)}$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Finalement, on définit

$$V_i := \bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid i(V) = i\}.$$

Comme $\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup \mathcal{V} = X$, la famille $(V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Il est localement fini puisque $\mathcal{V}$ l'est; ensuite, grâce à la finitude locale de $\mathcal{V}$, on a

$$\overline{V}_i = \overline{\bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid i(V) = i\}} = \bigcup \left\{\overline{V} \in \mathcal{V} \;\middle|\; i(V) = i\right\} \subseteq \bigcup_{x \in U_{i(V)}} \overline{V_{x,i(V)}} \subseteq U_{i(V)}.$$

(b) Supposons que $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement tel qu'il existe une famille de fonctions $(\varphi_j\colon X \to I)_{j\in J}$ avec $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$, $\big(\mathrm{supp}(\varphi_j)\big)_{j\in J}$ localement fini, et la somme strictement positive. Alors en définissant

$$\varphi'_j := \frac{\varphi_j}{\sum_{i\in J} \varphi_i}$$

on obtient un fonction bien definie et continue $\varphi'_j : X \to \mathbb{R}$ (grace à la condition sur les supports). Ensuite, c'est facile à voir que $\sum_{i\in I} \varphi'_i(x) = 1$ pour n'importe quel $x \in X$. Par conséquent, pour tout $j \in J$ on a $0 \leq \varphi'_j \leq \sum_{i\in J} \varphi'_i = 1$, et donc on peut considérer chaque φ'_j comme une fonction $\varphi'_j\colon X \to I$. En particulier, une telle famille $(\varphi'_j)_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_j)_{j\in J}$, ce qui est donc numérable.

(c) En appliquant le point (a) deux fois, on trouve des recouvrements localement finis $(V_j)_{j\in J}$ et $(W_j)_{j\in J}$ tels que $\overline{V}_j \subseteq W_j \subseteq \overline{W}_j \subseteq U_j$ pour tout $j \in J$. Comme X est normal, on peut utiliser le Lemme d'Uryshon pour avoir pour tout $j \in J$ une function $\varphi_j : X \to I$ telle que $\varphi_j \overline{V}_j \subseteq \{1\}$ et $\varphi_j(X \setminus W_j) \subseteq \{0\}$. Alors $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subseteq \overline{W}_j \subseteq U_j$ et $(\mathrm{supp}\,\varphi_j)_{j\in J}$ et localement fini parce que $(\overline{W}_j)_{j\in J}$ l'est. Finalement, tout $x \in X$ appartient à quelque V_{j_0}, et donc on a que $\sum_{j\in J} \varphi_j x \geq \varphi_{j_0} x = 1 > 0$. En utilisant le point (b) on peut conclure. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 19

Exercice 1. Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Preuve. Si X est compact, alors toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ est bornée, parce que $fX \subseteq \mathbb{R}$ est compact, donc fermé et borné. Montrons maintenant que si X n'est pas compact, alors nous pouvons construire une fonction continue qui n'est pas bornée. Si X n'est pas compact, il y a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'admet aucune sous-suite convergente. En enlevant des éléments dupliqué (dont il y a seulement un nombre fini) on peut supposer que $x_m \neq x_n$ pour $m \neq n$. Maintenant, $A := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé parce que $\overline{A}$ est l'ensemble des $x \in X$ qui sont la limite d'une suite dans A. Finalement, nous pouvons définir une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$, par $x_n \mapsto n \in \mathbb{R}$. Elle est continue parce que A est discret. Par Tietze, on peut étendre f en une fonction $X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée. □

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que si un espace compact de Hausdorff X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.

(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.

(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Preuve. Ad (a): Si X est métrisable et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, les boules $B(x, q)$ avec $x \in X$ forment un recouvrement ouvert de X, qui a donc un sous-recouvrement fini $\mathcal{B}_q$. En utilisant l'axiome du choix, on choisit pour tous $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ un tel $\mathcal{B}_q$ et alors $\mathcal{B} := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathcal{B}_q$ est une base dénombrable pour X. Réciproquement, si X a une base dénombrable, on peut appliquer le théorème d'Urysohn parce que tout espace compact de Hausdorff est régulier.
Ad (b): Noter d'abord que A, B, étant deux sous-espaces fermés de X, sont compacts et donc par (a) possèdent deux bases dénombrables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Mais maintenant, vu que A et B sont disjoints, ils sont aussi ouverts et donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une base dénombrable de X, ce qui montre (encore une fois par (a)) que X est métrisable.
Ad (c): Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases dénombrables de A et B. Pour $U \in \mathcal{A}$ on note que

$$U' := U \cup (X \setminus A) \qquad \text{et} \qquad U \setminus B$$

sont ouverts dans X (en fait, U' est le plus grand ouvert de X avec $A \cap U' = U$). De façon similaire, pour $V \in \mathcal{B}$

$$V'' := V \cup (X \setminus B) \qquad \text{et} \qquad V \setminus A$$

sont ouverts dans X. Pour prouver l'énoncé, montrons que $\mathcal{C}$, la réunion des

$$U' \cap V'',\ U \setminus B,\ V \setminus A \qquad \text{avec} \qquad U \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{B}$$

est une base pour X. Alors, soit $W \subseteq X$ ouvert et $x \in W$. Si $x \in A$ mais $x \notin B$ on trouve $U \in \mathcal{A}$ tel que $x \in U \subseteq W \cap A$. Donc $x \in U \setminus B \subseteq W$ et $U \setminus B \in \mathcal{C}$. Similairement pour $x \in X \setminus A$. Finalement, si $x \in A \cap B$, on a $U \in \mathcal{A}$, $V \in \mathcal{B}$ avec $x \in U \subseteq W \cap A$, $x \in V \subseteq W \cap B$ et donc

$$x \in U' \cap V'' = (U \cap V) \cup (U \setminus B) \cup (V \setminus A) \subseteq W.$$

□

Définition. Un espace topologique X est *localement compact* ssi pour chaque point $x \in X$ et chaque voisinage ouvert U de x, il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $x \in \mathring{K} \subseteq K \subseteq U$. C'est à dire, les voisinages compacts engendre le filtre $\mathcal{N}(x)$.

Exercice 3. Montrer qu'un espace localement compact de Hausdorff est

(a) régulier.

(b) complètement régulier.
Indication: Utiliser le lemme de recollement.

Preuve.

(a) Comme X est d'Hausdorff, les singletons sont fermés. Pour voir qu'il est régulier, on utilise la caractérisation, et on considère un point $x \in X$ et un ouvert $U \ni x$. Comme X est localement compacte, il existe un compacte $K \subseteq U$ tel que $x \in F^\circ \subseteq K \subseteq X$. On note que K est un compact dans un espace de Hausdorff, et il est donc fermé. Il decoule que $\overline{K^\circ} \subseteq K$. Si finalement on pose $V := K^\circ$, on obtient

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq K \subseteq U,$$

ce qui montre que X est régulier.

(b) Pour voir diréctement que X est complétement régulier, on prend un point x et un fermé F qui ne le contient pas. En posant $U := X \setminus F$, de l'hypothèse on trouve un compact K tel que $x \in K^\circ \subseteq K \subseteq U = X \setminus F$. Comme K est compact et de Hausdorff, il est normal. Alors on peut séparer x et le fermé $K \setminus K^\circ$ par un fonction continue $f\colon K \to \mathbb{R}$ telle que $f = 0$ sur $K \setminus K^\circ$, et $f(x) = 1$. Par le Lemme de recollement, on peut récoller f avec la fonction qui vale constantement 0 sur le fermé $X \setminus K^\circ$, en obtenant une fonction g qui est 0 sur $X \setminus K^\circ \supseteq X \setminus U = F$, et 1 sur x. □

Exercice 4. Pour un espace compact de Hausdorff X on dénote $C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$, qui possède naturellement la structure d'un anneau en sommant et multipliant les fonctions valeur par valeur:

$$(f+g)x := fx + gx, \qquad (fg)x := (fx)(gx)$$

pour f, $g \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$. Soit $X' := \operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $C(X, \mathbb{R})$ et pour $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$U_f := \{x \in X \mid fx \neq 0\}, \qquad U'_f := \{\mathfrak{m} \in X' \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

On va montrer que l'on peut reconstruire X de $C(X, \mathbb{R})$ en montrant que

(a) les U_f forment une base pour la topologie de X et les U'_f forment une base de topologie sur X' (et on regarde X' comme un espace topologique muni de cette topologie);

(b) l'application

$$\varphi\colon X \to X',\, x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid fx = 0\}$$

est bien-défini (i.e. $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal) et continue;
Indication: Considérer $\mathrm{ev}_x\colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(c) l'application φ est bijectif.
Indication: Pour la surjectivité, montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$

$$V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} \neq \varnothing.$$

(d) l'application φ est ouverte.

Preuve. Ad (a): En écrivant $A_f := X \setminus U_f = \{x \in X \mid fx = 0\}$. Parce que X est complètement régulier, on trouve pour tout fermé $A \subseteq X$ et tout $x \notin A$ une application $f\colon X \to \mathbb{R}$ avec $fA \subseteq \{0\}$ et $fx \neq 0$. On conclut que

$$A = \bigcap_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ A \subseteq A_f}} A_f$$

et donc les U_f forment une base pour la topologie de X. Maintenant, si f, $g \in C(X, \mathbb{R})$, alors $U'_f \cap U'_g = U'_{fg}$ (parce qu'un idéal maximal est premier) et donc $\{U'_f \mid f \in C(X, \mathbb{R})\}$ est une base de topologie.

Ad (b): L'évaluation $\mathrm{ev}_x\colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux, surjectif et $\operatorname{Ker} \mathrm{ev}_x = \mathfrak{m}_x$. Donc $\mathbb{R} \cong C(X, \mathbb{R})/\mathfrak{m}_x$, ce qui montre que $\mathfrak{m}_x$ est maximal parce que $\mathbb{R}$ est un corps. L'application φ est continue parce que pour $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$\varphi^{-1} U'_f = \left\{ x \in X \;\middle|\; \mathfrak{m}_x \in U'_f \right\} = \{x \in X \mid f \notin \mathfrak{m}_x\} = \{x \in X \mid fx \neq 0\} = U_f.$$

Ad (c): L'application φ est injectif parce que X est "complètement de Hausdorff" dans le sens que pour tout x, $y \in X$ distincts, il existe $f\colon X \to \mathbb{R}$ avec $fx = 0$ et $fy \neq 0$. Ça veut dire $f \in \mathfrak{m}_x$ mais $f \notin \mathfrak{m}_y$ et donc $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. Pour la surjectivité, on va montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$ on trouve

$$x \in V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} = \{x \in X \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x\},$$

ce qui implique que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$ et donc $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ par la maximalité de $\mathfrak{m}$. Par absurde, supposons que $V(\mathfrak{m}) = \varnothing$, i.e. que pour tout $x \in X$ il existe $f \in \mathfrak{m}$ avec $fx \neq 0$. Par la continuité de f, ça implique qu'il existe même $U \ni x$ ouvert avec $0 \notin fU$. Donc

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \text{ ouvert} \mid \text{il existe } f \in \mathfrak{m} \text{ telle que } fx \neq 0 \text{ pour tout } x \in U\}$$

est un recouvrement ouvert de X et on choisit un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots, U_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ tels que $f_i x \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in U_i$. Maintenant $f := f_1^2 + \ldots + f_n^2 \in \mathfrak{m}$ et $fx \neq 0$ pour tout $x \in X$. Mais ça veut dire que $f \in C(X, \mathbb{R})$ est inversible et donc $\mathfrak{m} = C(X, \mathbb{R})$, ce qui contredit la maximalité de $\mathfrak{m}$.

Ad (d): On a déjà vu que $U_f = \varphi^{-1} U'_f$ et donc par la surjectivité de φ

$$\varphi U_f = \varphi \varphi^{-1} U'_f = U'_f.$$

□

TOPOLOGIE - SÉRIE 20

Exercice 1. Vrai ou faux? Un quotient d'un espace T_1 est T_1. Un quotient d'un espace compact est compact.

Preuve. Soit $X := \mathbb{R}$, et on définit sur X la relation d'équivalence suivante:

$$x \sim y \iff x, y \in (0,1] \text{ ou } x = y.$$

On note $X/{\sim}$ l'espace topologique quotient. On a que X est normal (parce qu'il est métrisable), mais $X/{\sim}$ ne satisfait pas l'axiome T_1. En fait, chaque voisinage de $[0]$ doit intersecter $[1]$.

Par contre tout espace topologique quotient d'un espace compact est compact aussi, parce qu'il est l'image par une application continue d'un espace compact. □

Exercice 2. La *suspension* d'un espace $X \neq \varnothing$ est $\Sigma X := (X \times I)/{\sim}$ où $\sim$ est la relation d'équivalence, engendrée par $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour x, $y \in X$ (faire un dessin!). Démontrer que $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons que $\Sigma S^{n-1} \cong S^n$ en considérant la projection du cylindre $S^{n-1} \times I$ qui déplace tout point vers le axe des x_{n+1} jusqu'à ce qu'il est situé sur S^n:

$$p\colon S^{n-1} \times I \to S^n,\ ((x_1, \ldots, x_n), t) \mapsto \left(x_1\sqrt{1-t^2}, \ldots, x_n\sqrt{1-t^2}, t\right).$$

Cette projection est bien définie, car $\|p(x,t)\| = \sqrt{(1-t^2)\|x\|^2 + t^2} = \sqrt{(1-t^2)+t^2} = 1$. De plus, p est continue et constante sur $S^{n-1} \times \{-1\}$ et $S^{n-1} \times \{1\}$ et donc factorise uniquement par q comme $p = \bar{p} \circ q$ avec $\bar{p}$ continue. Clairement, $\bar{p}$ est bijective et parce que la suspension ΣS^{n-1} est l'image du compact $S^{n-1} \times I$ par q, elle aussi compacte. Finalement, S^n est de Hausdorff, ce qui implique que $\bar{p}$ est un homéomorphisme. □

Exercice 3. **(Espace projectif)** L'espace projectif réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/{\sim} \qquad \text{où} \qquad x \sim y \Leftrightarrow \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Ça veut dire $\mathbb{RP}^n$ est l'espace des droites par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

(a) Chaque $\mathbb{RP}^n$ est compact de Hausdorff et $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

(b) Il y a un recouvrement ouvert $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ de $\mathbb{RP}^n$ où tout U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. *Indication: U_i est l'image de $V_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1\}$ dans $\mathbb{RP}^n$.*

(c) Les compléments des U_i sont homéomorphes à $\mathbb{RP}^{n-1}$.

(d) $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} \cong S^n$ où $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{RP}^n \setminus U_i \subseteq \mathbb{RP}^n$ pour un $i \in 1, \ldots, n+1$.

Preuve. Ad (a): En fait, $\mathbb{RP}^n$ est un quotient de S^n où la projection est

$$q\colon S^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n,\ x \mapsto [x]$$

(c'est la restriction de la projection $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$). Donc $\mathbb{RP}^n$ est l'image d'un espace compact par une application continue. Pour la propriété de Hausdorff, on représente $[x]$, $[y] \in \mathbb{RP}^n$ avec $[x] \neq [y]$ par deux points x, $y \in S^n$ sur la sphère. L'idée maintenant est de séparer x et y par deux ouverts U et V sur la sphère et après séparer les droites $[x] = \mathbb{R}^\times x$ et $[y] = \mathbb{R}^\times y$ par les cônes correspondants, mais il faut que l'on paye attention que V ne contient pas de point antipodal de U. Plus formellement, on choisit ε_1, δ_1, ε_2, $\delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \delta_1) = B(x, \varepsilon_2) \cap B(-y, \varepsilon_2) = \varnothing.$$

En posant, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $U := B(x, \varepsilon)$ et $V := B(y, \delta)$, il suit que $U \cap V = U \cap -V = \varnothing$ et donc les cônes $[U] = \{[u] \in \mathbb{RP}^n \mid u \in U\}$ et $[V]$ sont aussi disjoints. De plus, en notant $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$ l'application quotient, ils sont ouverts, car $p^{-1}[U] = \mathbb{R}^\times U$, ce qui correspond à $\mathbb{R}^\times \times U$ sous l'homéomorphisme

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^\times \times S^n,\ p \mapsto \left(\|p\|, \frac{p}{\|p\|}\right),\ \lambda \cdot p \leftarrow\!\shortmid (\lambda, p).$$

Finalement, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ parce que la composition

$$S^1 \to S^1 \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathbb{RP}^1,\ z \mapsto z^2 \mapsto [z^2]$$

est continue, bijectif (parce que $q^{-1}[z] = \{\pm z\}$), S^1 est compact et $\mathbb{RP}^1$ de Hausdorff.

Ad (b): Avec V_i comme dans l'indication et $U_i := pV_i$ (où $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$ est l'application quotient), les U_i recouvrent $\mathbb{RP}^n$ parce que si $[x] = [x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$, il existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que $x_i \neq 0$ et $[x] = [x/x_i] \in U_i$. Ils sont ouverts parce que

$$p^{-1}U_i = p^{-1}pV_i = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} \lambda V_i = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i = 0\right\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{pr}_i^{-1}\{0\}.$$

Il reste à montrer que $U_i \cong \mathbb{R}^n$. Mais la restriction de p

$$f\colon V_i \to U_i,\ x \mapsto [x]$$

est clairement continue et surjectif. Elle est aussi injectif, car si $[x] = [y]$ pour x, $y \in V_i$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $y = \lambda x$ et en particulier $1 = y_i = \lambda x_i = \lambda$. Finalement, elle est ouverte, car si $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $x \in V_i$ on a

$$p^{-1}f(B(x, \varepsilon) \cap V_i) = \mathbb{R}^\times (B(x, \varepsilon) \cap V_i) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} \lambda B(x, \varepsilon) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^\times} B(\lambda x, |\lambda| \, \varepsilon).$$

Donc f est un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \cong V_i \cong U_i$.

Ad (c): Clairement $\mathbb{RP}^n \setminus U_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i = 0\} = pP_i$ où $P_i := \mathrm{pr}_i^{-1}\{0\}$ est le hyperplan des $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ avec $x_i = 0$. Mais $P_i \cong \mathbb{R}^n$ et la restriction de la relation d'équivalence $\sim$ à P_i est la relation correspondante sur $\mathbb{R}^n$. Donc $pP_i \cong \mathbb{R}^n/\!\sim\, = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Ad (d): On va supposer que $U_i = U_1$, les autres cas sont analogues. Intuitivement

$$\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1} = \mathbb{RP}^n/(\mathbb{RP}^n \setminus U_1) = \big(U_1 \cup (\mathbb{RR}^n \setminus U_1)\big)/(\mathbb{RP}^n \setminus U_1) \cong U_1 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

(où ∞ est la classe d'équivalence de $\mathbb{RP}^n \setminus U_1$) est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ (cf. série 13, exercice 3) et il faut juste montrer que la topologie sur $\mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1}$ est celle du compactifié. Ça veut dire que pour tout $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ avec $\mathbb{RP}^n \setminus U_1 \subseteq V$, il faut monter que $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert ssi $U_1 \setminus V \subseteq U_1$ est fermé (dans U_1!) et compact. Mais $\mathbb{RP}^n \setminus V = U_1 \setminus V$ parce que $\mathbb{RP}^n \setminus V \subseteq U_1$ par hypothèse. Alors si $V \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert, $\mathbb{RP}^n \setminus V = U_1 \setminus V$ est fermé et donc compact parce que $\mathbb{RP}^n$ est compact. Par contre, si $U_1 \setminus V \subseteq U_1$ est fermé (dans U_1) et compact $U_1 \setminus V = \mathbb{RP}^n \setminus V$ doit aussi être fermé dans $\mathbb{RP}^n$ parce qu'un compact dans un espace de Hausdorff doit être fermé. □

Exercice 4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$ fermé. Pour toute application continue $f\colon A \to Y$, on définit

$$X \amalg_f Y := (X \amalg Y)/\!\sim \qquad \text{où } \sim \text{ est engendrée par } a \sim f(a)\ \forall a \in A.$$

On dit alors que X a été *attaché* à Y via f, qui est *l'application d'attachement*. En écrivant $q\colon X \amalg Y \to X \amalg_f Y$ pour l'application quotient, montrer que

(a) la restriction $q|_Y\colon Y \to X \amalg_f Y$ est un plongement fermé;

(b) la restriction $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to X \amalg_f Y$ est un plongement ouvert;

(c) $(X \amalg_f Y)/Y \cong X/A$.

Preuve. Ad (a): La continuité est claire, car $q|_Y$ est la restriction d'une application continue. Aussi, $q|_Y$ est injective, car si $y \sim y'$ pour y, $y' \in Y$, il y a un $x \in X$ tel que $y = fx = y'$. Finalement, qY est fermé parce que

$$q^{-1}qY = A \amalg Y \subseteq X \amalg Y \qquad \text{est fermé.}$$

Ad (b): Continuité et injectivité sont claires et $q(X \setminus A)$ et ouvert parce que

$$q^{-1}q(X \setminus A) = X \setminus A \subseteq X \subseteq X \amalg Y \qquad \text{est ouvert.}$$

Ad (c): En écrivant $p\colon X \twoheadrightarrow X/A$ et $r\colon X \amalg_f Y \twoheadrightarrow (X \amalg_f Y)/Y$ pour les applications quotient, la composée

$$X \xrightarrow{q|_X} X \amalg_f Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} (X \amalg_f Y)/Y \qquad \text{factorise uniquement par } p,$$

disons $r \circ q|_X = g \circ p$ où $g\colon X/A \to (X \amalg_f Y)/Y$ est continue. Par contre, l'application continue

$$h\colon X \amalg Y \to X/A,\ x \mapsto [x],\ y \mapsto [A] \quad \text{(la classe d'équivalence de } A\text{)}$$

factorise uniquement par q (car $ha = hfa = [A]$ pour tout $a \in A$) et même par $r \circ q$ (car h est constante sur Y), disons $h = \bar{h} \circ r \circ q$ ce qui nous donne l'inverse de g.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "p"'] & X \amalg Y \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dl, "h"] & X \amalg_f Y \arrow[r, two heads, "r"] & (X \amalg_f Y)/Y \arrow[dlll, dotted, bend left, "g"] \\
X/A \arrow[urrr, dotted, bend right, "\bar{h}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En fait, pour $x \in X$ on a $\bar{h}gpx = \bar{h}rqx = hx = px$. Parce que p factorise uniquement par p comme $p = \mathrm{id}_{X/A} \circ p$ on obtient $\bar{h} \circ g = \mathrm{id}_{X/A}$. Similairement pour $g \circ \bar{h}$. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 21

Exercice 1. Les espaces métriques suivants, sont-ils complets?

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $]0,1[$ (c) Un ensemble X avec la métrique discrète

Solution.

- NON. Considérons la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $x_0 := 3$, $x_1 := 3,1$, $x_2 := 3,14$, $\ldots$, et x_n est le développement décimal de π jusqu'au n-ième chiffre. Donc, elle est de Cauchy parce qu'elle converge vers π dans $\mathbb{R}$, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
- NON. La suite définie par $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ est de Cauchy parce qu'elle converge vers 1 dans $\mathbb{R}$, et donc elle ne converge pas dans $(-1,1)$.
- OUI. En effet, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors il y a un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n > N$ on a $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$. Mais cela signifie que $d(x_n, x_m) = 0$, et donc $x_m = x_n$. Pourtant la suite est définitivement constante, et elle converge vers ce valeur. $\square$

Remarque. Pour le dernier point, il faut bien distinguer entre un espace métrique discret et un espace métrique, muni de la métrique discrète. Par exemple, $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ avec la métrique induite est un espace métrique discrète mais pas complet.

Exercice 2. Soit X un espace métrique tel qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que tout les $\overline{B(x,\varepsilon)}$ avec $x \in X$ sont compacts. Montrer qu'alors X est complet.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, et $\varepsilon > 0$. Alors il y a un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n > N$ on a que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Cela veut dire que la suite est finalement dans la boule $\overline{B(x_{N+1}, \varepsilon)}$, qui est compacte et donc complète. Alors $\{x_n\}_{n>N}$ converge vers in certain $x \in \overline{B(x,\varepsilon)} \subset X$, aussi bien que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Exercice 3. (Théorème de Baire) Si X est un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles $U_n \subseteq X$ ouverts et denses, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$ est dense aussi.
Indication: Montrer que chaque $U \subseteq X$ ouvert et non-vide intersecte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Preuve. On note d'abord qu'un ensemble $M \subseteq X$ est dense si et seulement s'il intersecte tout $U \subseteq X$ ouvert et non-vide. Alors, pour montrer la densité de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, soit $U \subseteq X$ ouvert et non-vide et définissons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$r_n < \frac{1}{n+1}, \qquad \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq U, \qquad \overline{B}(x_0, r_0) \subseteq U_0 \text{ et } \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$$

par récurrence. Parce que $U_0 \subseteq X$ est dense, on peut choisir $x_0 \in U \cap U_0$ et $r_0 \in]0,1[$ tels que

$$\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq U \cap U_0.$$

Similairement, si on a déjà $x_0, \ldots, x_n$ et $r_0, \ldots, r_n$, on utilise la densité de U_{n+1} pour choisir $x_{n+1} \in B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ et $r_{n+1} \in]0, 1/(n+2)[$ tels que

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}.$$

Maintenant, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy parce que pour $m < n$ quelconques

$$d(x_m, x_n) < r_m < \frac{1}{m+1} \qquad \text{car} \qquad x_n \in \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_m, r_m).$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x \in X$ et on a $x \in U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ parce que à partir de $N \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $\overline{B}(x_N, r_N)$, qui est fermé et donc aussi $x \in \overline{B}(x_N, r_N) \subseteq U \cap U_N$. $\square$

Exercice 4. Soit $f\colon X \to Y$ une surjection continue.

(a) Si X est compact, métrisable et Y est de Hausdorff, alors Y est métrisable.
Indication: Construire une base dénombrable.

(b) Si X est localement connexe (i.e. pour tout point, chaque voisinage contient un voisinage connexe) et f est une application quotient, alors Y est localement connexe.
Indication: X est localement connexe ssi tout ses sous-espaces ouverts ont des composantes connexes ouvertes. De plus, la préimage d'une composante connexe par une application continue est une réunion de composantes connexes.

(c) Conclure que chaque quotient de Hausdorff de I est compact, connexe, localement connexe et possède une base dénombrable.
Indication: Une application continue, surjective et fermée est un quotient.

Preuve. Ad (a): Parce que l'espace X est compact et métrisable, il possède une base dénombrable $\mathcal{B}$ et on va montrer que

$$\mathcal{C} := \{Y \setminus f(X \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \mid n \in \mathbb{N}_{>0},\, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}\}$$

est une base dénombrable pour Y. Clairement, les éléments de $\mathcal{C}$ sont ouverts dans Y parce que f est fermée. De plus, $\mathcal{C}$ est dénombrable, car c'est l'image de l'application

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathcal{B}^n \to \mathfrak{P}(Y),\, (B_1, \ldots, B_n) \mapsto Y \setminus f(X \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)),$$

dont la domaine est dénombrable (car c'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables). Maintenant, si $V \subseteq Y$ est un ouvert quelconque et $y \in V$, la préimage $f^{-1}y \subseteq X$ est fermée, donc compacte. Parce que $f^{-1}y \subseteq f^{-1}V$, on trouve $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tels que

$$f^{-1}y \;\subseteq\; U := B_1 \cup \ldots \cup B_n \;\subseteq\; f^{-1}V.$$

En prenant des compléments, on a

$$X \setminus f^{-1}y = f^{-1}(Y \setminus \{y\}) \supseteq X \setminus U \supseteq X \setminus f^{-1}V = f^{-1}(Y \setminus V).$$

Par la surjectivité de f (ce qui veut dire $M = ff^{-1}M$ pour tout $M \subseteq Y$) on trouve

$$Y \setminus \{y\} = ff^{-1}(Y \setminus \{y\}) \supseteq f(X \setminus U) \supseteq ff^{-1}(Y \setminus V) = Y \setminus V$$

et donc

$$y \in Y \setminus f(X \setminus U) \subseteq V.$$

Ad (b): Soit $V \subseteq Y$ ouvert et $C \subseteq V$ une composante connexe de V. Il faut montrer que $C \subseteq Y$ est ouvert; i.e. que $f^{-1}C \subseteq X$ est ouvert (f est un quotient). Mais $f^{-1}C \subseteq f^{-1}V$ est une réunion de composantes connexes de $f^{-1}V$ (cf. le lemme) qui sont tous ouverts.

Ad (c): Soit X un espace de Hausdorff pour qu'il existe une application continue, surjective et fermée $q\colon I \twoheadrightarrow X$. Il est clairement connexe et compact, car il est l'image de I par une application continue. De plus, par (a), X possède une base dénombrable. Finalement, q est un quotient. À savoir, si $A \subseteq X$ est tel que $q^{-1}A \subseteq I$ est fermé, alors, en utilisant la surjectivité et la fermeture de q, l'ensemble $A = qq^{-1}A \subseteq X$ est fermé X. Donc, finalement, par le point (b), X est localement connexe. □

Lemme. Si $f\colon X \to Y$ est une surjection continue et $C \subseteq Y$ une composante connexe, alors $f^{-1}C$ est une réunion de composantes connexes de X.

Preuve. Si $B \subseteq X$ est une composante connexe qui intersecte $f^{-1}C$, alors $C \cup fB \subseteq Y$ est connexe parce que C, fB le sont et $C \cap fB = ff^{-1}C \cap fB \supseteq f(f^{-1}C \cap B) \neq \varnothing$. Par la maximalité de C, on conclut que $C \cup fB = C$ et donc $B \subseteq f^{-1}C$. $\square$

Remarque. La réciproque de (c) est vraie aussi et connu comme le *théorème de Hahn-Mazurkiewicz*.

TOPOLOGIE - SÉRIE 22

Exercice 1. Soit $X \neq \varnothing$ un espace métrique complet et $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \to \mathbb{R}$ (i.e. les applications $X \to \mathbb{R}$ dont l'image est bornée) que l'on muni de la norme $\|f\| := \sup_{x \in X} |fx|$. En fixant un point $x_0 \in X$, montrer que $X \to B(X, \mathbb{R})$, $x \mapsto \varphi_x$ avec $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$ est un plongement isométrique.

Preuve. pour tout $x \in X$ on denote $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$, pour un $x_0 \in X$ fixé. Alors pour tout $x \in X$ la function $\varphi_x : x \to \mathbb{R}$ est bornée. En fait, à partir des inégalités

$$d(y, a) \leq d(y, b) + d(x, b)) \text{ et } d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b)),$$

on obtient

$$|d(y, x) - d(y, b)| \leq d(x, b)$$

et quand $b = x_0$ on peut conclure que pour tout $y \in X$ on a

$$|\varphi_x(y)| \leq d(x, x_0).$$

Il reste à montrer que $\varphi : x \in X \mapsto \varphi_x \in B(X, \mathbb{R})$ est une isométrie, c'est à dir

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = d(x, z).$$

En utilisant la definition de ρ, et les inégalité qu'on vient de voir, on a

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = \sup_{y \in X} |\varphi_x(y) - \varphi_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

De l'autre côté, cette inégalité devient stricte lorsqu'on considère $y = x$, et donc

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = \sup_{y \in X} |\varphi_x(y) - \varphi_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, z)| \geq |d(x, x) - d(x, z)| = d(x, z).$$

Définition. Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ et l'inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sont continus.

Exercice 2. Prouver que les suivants sont des groupes topologiques:

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve.

- On sait déjà que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe, et que la multiplication et l'inversion sont des applications continues par rapport à la topologie standard. Cela signifie que $(\mathbb{R}, +, \mathcal{T}_{st})$ est un groupe topologique.
- On sait déjà que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, et puisque la topologie sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est discrète, on a que la multiplication et l'inversion sont continues.
- La structure de groupe sur S^1, après avoir identifié $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, est la suivante:

  $$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', yx' + xy') \in S^1 \subset \mathbb{R}^2.$$

  Donc, chaque composante utilise seulement l'addition, la différence et la multiplication de nombres réels, qu'on sait être continues. De plus, l'inversion peut être décrite par

  $$(x, y)^{-1} := (x, -y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2,$$

  ce qui est clairement une application continue. Cela veut dire que S^1 est un groupe topologique.

- On sait déjà que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Montrons que la multiplication et l'inversion sont continues par rapport à la topologie standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

  $$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj},$$

  qui est continue car la somme et le produit son continus. Donc la multiplication des matrices est continue par proprieté universelle de la topologie produit car chaque cordonnée est continue. On rappelle que le déterminant $\det : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue car c'est un polynome. On peut donc appliquer la regle de Cramer pour inverser les matrices:

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T,$$

  ou C est la matrice des cofacteurs de A définie par $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. Encore une fois, par la proprietée universelle de la topologie produit, on conclut que l'inversion est continue.

□

Exercice 3. Soit G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Montrer que

(a) $\overline{H} \subseteq G$ est aussi un sous-groupe;

(b) le quotient $G \twoheadrightarrow G/H$ est ouvert;

(c) si H est normal, $\overline{H}$ l'est aussi;

(d) si H est normal, G/H muni de la topologie quotient et de la multiplication induite de G est aussi un groupe topologique.

Preuve. Ad (a): On sait que $S \subseteq G$ est un sous-group si et seulement si $f(S \times S) \subseteq S$, où $f : G \times G \to G$ est l'application continue donnée par $f(g, g') = g^{-1} \cdot g'$. On a que

$$f(\overline{H} \times \overline{H}) = f(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{f(H \times H)} \subseteq \overline{H},$$

ce qui montre que l'adérence d'un sous-group l'est toujours.

Ad (b): Soit $U \subset X$ un ouvert. Il faut montrer que $q(U) \subseteq G/H$ est ouvert; i.e. que $q^{-1}(q(U)) \subseteq X$ l'est. Mais

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{u \in U} Hu = \bigcup_{h \in H} hU \subseteq X,$$

ce qui est ouvert parce que tout où hU l'est. En fait, pour tout $g \in G$, on a un homéomorphisme $l_g \colon G \to G$, défini par $g' \mapsto gg'$, avec inverse donnée par $l_{g^{-1}}$. En particulier, l_g est ouvert, et donc pour tout $U \subseteq G$ ouvert, on a que $g \cdot U = l_g(U)$ l'est aussi.

Ad (c): On sait que $S \subseteq G$ est un sous-group normal si et seulement si pour tout $g \in G$ on a $c_g(S) \subseteq S$, où $c_g : G \to G$ est l'application continue donnée par $f(g') = g^{-1} \cdot g' \cdot g$. On a que

$$c_g(\overline{H}) =\subseteq \overline{c_g(H)} \subseteq \overline{H},$$

ce qui montre que l'adérence d'un sous-group normal l'est toujours.

Ad (d): On sait que si le sous-group est normal, alors le quotient G/H a la structure d'un groupe. La multiplication et l'inverse sont les fonctionnes uniques telles que les diagrammes suivantes commutent:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "q \times q"] \arrow[d] & G/H \times G/H \arrow[d, dotted] \\ G \arrow[r, "q"'] & G/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "-1"'] & G/H \arrow[d, dotted] \\ G \arrow[r, "q"'] & G/H \end{tikzcd} .$$

Explicitement $(gH)(g'H) = (gg')H$ et $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Il reste que à vérifier la continuité de ces applications. En utilisant le lemme suivant et le point précédent, on a que l'application

$$G \times G \xrightarrow{q \times q} G/H \times G/H$$

est une application quotiente, car elle est surjective, ouverte et continue. On se souvient que pour un quotient $p\colon X \twoheadrightarrow X/\sim$, une application $f\colon X/\sim \to Y$ est continue ssi $f \circ p$ l'est. Dans notre cas, on obtient que la multiplication et l'inverse sur G/H sont vraiment continues. □

Lemme. Toute application surjective, continue et ouverte $p\colon X \twoheadrightarrow Y$ est un quotient.

Preuve. Il faut montrer que $V \subseteq Y$ est ouvert ssi $p^{-1}V \subseteq X$ l'est, où la direction "$\Rightarrow$" est la continuité de p. Par contre, si $p^{-1}V \subseteq X$ est ouvert, $V = pp^{-1}V$ par surjectivité, ce qui est ouvert par hypothèse. □

Exercice 4. Un *isomorphisme de groupes topologiques* entre deux groupes topologiques G, H est un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ qui est aussi un homéomorphisme.

(a) Soient G, H deux groupes topologiques et $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un morphisme de groupes qui est aussi continu, ouvert et surjectif. Alors, f factorise par le quotient $G/\operatorname{Ker} f$ et l'application induite $G/\operatorname{Ker} f \to H$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

(b) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ comme groupes topologiques.

Preuve. Ad (a): Puisque $f(\operatorname{Ker} f) = \{1\}$, l'application f factorise uniquement par le quotient $p\colon G \twoheadrightarrow G/\operatorname{Ker} f$ comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "f"'] & G/\operatorname{Ker} f \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & H \end{tikzcd}.$$

L'application induite $\bar{f}$ est un isomorphisme de groupes par la surjectivité de f. Aussi, elle est continue par la propriété universelle de la topologie quotient. Finalement, elle est ouverte (resp. fermée), car pour $U \subseteq G/\operatorname{Ker} f$ être ouvert (resp. fermé) veut dire que $p^{-1}U \subseteq G$ est ouvert (resp. fermé) et donc on a que $\bar{f}U = \bar{f}pp^{-1}U = fp^{-1}U$ l'est aussi.

Ad (b): L'application $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{i2\pi x}$ est continue, ouverte et surjective et $\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$. Maintenant une application directe de (a) montre l'énoncé. □

TOPOLOGIE - SÉRIE 23

Pour cette série, on fixe deux espaces topologiques X, Y et on va considérer les topologies suivantes sur l'ensemble Y^X d'applications (pas forcément continues) $X \to Y$:

- $\mathcal{T}_{\text{po}}$ - la topologie point-ouvert (i.e. la topologie produit);
- $\mathcal{T}_{\text{cc}}$ - la topologie de convergence compacte pour Y métrique;
- $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ - la topologie uniforme pour Y métrique.

Exercice 1. Rappelons que l'on a toujours $\mathcal{T}_{\text{po}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{cc}}$ et aussi $\mathcal{T}_{\text{cc}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{unif}}$ pour Y métrique. Dans certains cas, ces inclusions deviennent des égalités. Montrer que

(a) si X est discret, alors $\mathcal{T}_{\text{po}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) si X est compact, alors $\mathcal{T}_{\text{cc}} = \mathcal{T}_{\text{unif}}$.

Preuve. Ad (a): Soit $B_C(f,\varepsilon) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; \sup_{x\in C} d(fx, gx) < \varepsilon \right\}$ un ouvert de base pour $\mathcal{T}_{\text{cc}}$, où $C \subseteq X$ est compact, $f \in Y^X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Par compacité, $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini et

$$B_C(f,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^n B_{\{x_i\}}(f,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^n S(x_i, B(fx_i,\varepsilon)) \in \mathcal{T}_{\text{po}} \qquad \text{où}$$

$$S(x_i, B(fx_i,\varepsilon)) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; gx_i \in B(fx_i,\varepsilon) \right\} = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; d(fx_i, gx_i) < \varepsilon \right\}$$

est un ouvert de sous-base pour $\mathcal{T}_{\text{po}}$.
Ad (b): Soit $B(f,\varepsilon) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; \sup_{x\in X} \bar{d}(fx, gx) < \varepsilon \right\}$ un ouvert de base pour $\mathcal{T}_{\text{unif}}$, où $f \in Y^X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Si $\varepsilon > 1$ alors $B(f,\varepsilon) = Y^X$ par définition de $\bar{d}$; donc il suffit de considérer le cas $\varepsilon \in]0,1]$ où on peut remplacer $\bar{d}$ par d. Mais là, $B(f,\varepsilon) = B_X(f,\varepsilon) \in \mathcal{T}_{\text{cc}}$. □

Exercice 2. Si Y est un espace métrique complet, montrer que Y^X avec la topologie uniforme l'est aussi.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans Y^X par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$. En prenant $1 > \varepsilon > 0$ on a un indice N tel que pour tous m, $n > N$

$$\varepsilon > \bar{\rho}(f_m, f_n) = \sup\left\{ d(f_m(x), f_n(x)) \mid x \in X \right\} > d(f_m(x), f_n(x)).$$

Mais alors, pour tout $x \in X$ la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet Y. Soit $f(x)$ sa limite dans Y. Donc on a une application bien definie $f\colon X \to Y$, et on va prouver qu'elle est la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tous m, $n > N$ on a $\bar{\rho}(f_m, f_n) < \varepsilon/2$. Alors pour $x \in X$ et $n > N$ on a que

$$d(f(x), f_n(x)) = d\Big(\lim_{m\to\infty} f_m(x), f_n(x)\Big) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en prenant le suprémum

$$\bar{\rho}(f, f_n) = \sup\left\{ d(f(x), f_n(x)) \mid x \in X \right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

et donc $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f. □

Exercice 3. Montrer que

(a) $B(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) $C(I,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{I}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{po}}$.

Preuve. Ad (a): Montrons que $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est fermé par rapport à la topologie de la convergence uniforme. Il suffit de voir que la limit uniforme d'une suite d'applications bornées est toujours bornée. Soit alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite qui converge vers f. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - f_n(x)| < 1$ et $|f_n(x)| < M$ pour tout $x \in X$. On a que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M,$$

ce qui montre que f est bornée.

Montrons que $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas fermé par rapport à la topologie de la convergence compacte. Noter qu'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans la topologie de la convergence compacte ssi elle converge uniformement sur tous les compactes. Maintenant, considérons la suite d'applications dans $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée par $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \min\{n, |x|\}$ indicée par $n \in \mathbb{N}_{>0}$, qui converge ponctuellement vers $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Si la suite convergeait dans la topologie de la convergence compacte, il faudrait que la limite soit la même. Mais la fonction module n'est pas borné, et donc la suite ne converge pas dans $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ad (b): On sait déja que la limite uniforme d'une suite d'applications continues est toujours continue. Il découle que $C(I,\mathbb{R})$ est ferm'e par rapport à la topologie uniforme.

Montrons que $C(I,\mathbb{R})$ n'est pas fermé par rapport à la topologie point-ouvert. Noter qu'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans la topologie point-ouvert ssi elle converge point par point. Maintenant, considérons la suite d'applications continues $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ indicée par $n \in \mathbb{N}_{>0}$, qui converge vers $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta_{x,1}$ (i.e. $f1 = 1$ et $fx = 0$ pour $x \neq 1$), qui n'est pas continue. □

Exercice 4. (Théorème d'Approximation de Weierstrass) Dans cet exercice, on va analyser l'adhérence de l'ensemble $P(I,\mathbb{R})$ des applications polynomiaux sur I dans $C(I,\mathbb{R})$ par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$. Alors, soit $f \in C(I,\mathbb{R})$ avec $f0 = f1 = 0$, que l'on va considérer comme une fonction sur $\mathbb{R}$ avec $f|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$ (et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$). De plus, posons

$$Q_n(x) := c_n(1-x^2)^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ et } c_n \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tel que} \qquad \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Observer que les Q_n sont des fonctions paires (i.e. $Q_n(-x) = Q_n(x)$) et positives. Montrer que

(a) $c_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (*Indication: Intégrer jusqu'à* $1/\sqrt{n}$ *et utiliser l'inégalité de Bernoulli*);

(b) $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

En définissant $P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, montrer que

(c) $P_n(x)$ est polynomiale en x (*Indication: Changement de variable* $s := x + t$);

(d) $P_n \to f$ uniformément sur I (*Indication: Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *il y a* $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *tel que* $|y - x| < \delta \Rightarrow |fy - fx| < \varepsilon/2$ et que l'on utilise pour subdiviser l'intégrale $P_n(x) - f(x)$ en trois parties $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$).

(e) Généraliser au cas où $f0$ et $f1$ sont arbitraires.

(f) En conclure que $\overline{P(I,\mathbb{R})} = C(I,\mathbb{R})$.

Preuve. Ad (a):

$$
\begin{aligned}
1 = c_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2c_n \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \geqslant 2c_n \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n \mathrm{d}x \\
\overset{\text{Bernoulli}}{\geqslant} 2c_n \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\mathrm{d}x = \frac{4c_n}{3\sqrt{n}} > \frac{c_n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Ad (b): Par (a), on a $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n < \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$ pour tout $x \in [\delta, 1]$ et donc $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$.

Ad (c): En posant $s := x + t$ (et donc $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$) pour $x \in I$ fixé, on calcule

$$
P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(s)Q_n(s-x)\mathrm{d}s,
$$

ce qui est clairement polynomial en x.

Ad (d): Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $|y-x| < \delta$ implique $|fy - fx| < \varepsilon/2$, ce qui existe par la continuité uniforme de f. En définissant $M := \max_{x\in I} |fx|$, on calcule

$$
|P_n(x) - f(x)| = \left| P_n(x) - f(x) \int_{-1}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t.
$$

Maintenant, on subdivise $\int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t$ en trois parties $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$, $[\delta, 1]$ et on estime

$$
\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2},
$$

$$
\int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n,
$$

et de manière analogue $\int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$. Donc

$$
|P_n(x) - f(x)| \leqslant 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
$$

pour n grand.

Ad (e): En remplace un $f \in C(I, \mathbb{R})$ arbitraire par

$$
g(x) := f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)),
$$

ce qui satisfait $g(0) = g(1) = 0$. Comme ci-dessus on trouve une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g et donc $\big(P_n + f(0) + x(f1 - f0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f.

Ad (f): Pour tout $f \in C(I, \mathbb{R})$ on a construit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $P(I, \mathbb{R})$ qui converge uniformément (i.e. par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$) vers f, ce qui veut dire que $\overline{P(I, \mathbb{R})} = C(I, \mathbb{R})$. $\square$

TOPOLOGIE - SÉRIE 24

Exercice 1. Pour un espace topologique X et un espace métrique Y, montrer que la topologie de convergence compacte et la topologie compact ouvert sur $C(X,Y)$ sont les mêmes.

Preuve. Pour l'inclusion "$\supseteq$" soit $f \in S(C,U)$ où $C \subseteq X$ est compact et $U \subseteq Y$ ouvert. Par compacité de fC, le minimum $\varepsilon := \min_{c\in C} d(fc, Y \setminus U) > 0$ existe et $fC \subseteq B(fC,\varepsilon) \subseteq U$; donc

$$f \in B_C(f,\varepsilon) \subseteq S(C,U).$$

Pour l'inclusion "$\subseteq$" soit $B_C(f,\varepsilon) \subseteq X$ comme dans (a) avec $C \subseteq X$ compact, $f \in C(X,Y)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Considérons maintenant le recouvrement ouvert

$$\bigcup_{x\in C} \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; U \text{ ouvert, } x \in U \text{ et } f\bar{U} \subseteq B(fx,\varepsilon/2) \right\}.$$

C'est un recouvrement, car si $x \in C$ on trouve, par continuité de f, un voisinage ouvert U de x tel que $fU \subseteq B(fx,\varepsilon/3)$ et donc

$$f\bar{U} \subseteq \overline{fU} \subseteq \overline{B(fx,\varepsilon/3)} \subseteq \bar{B}(fx,\varepsilon/3) \subseteq B(fx,\varepsilon/2).$$

En utilisant la compacité de C on choisit un sous-recouvrement fini $U_1,\ldots,U_n$ et pour tout i un $x_i \in U_i \cap C$ tel que $f\overline{U_i} \subseteq B(fx_i,\varepsilon/2)$. En notant $C_i := \overline{U_{x_i}} \cap C$ on a défini des compacts avec

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(C_i, B(fx_i,\varepsilon/2)) \subseteq B_C(f,\varepsilon).$$

À savoir: Si $g \in \bigcap_i S(C_i, B(fx_i,\varepsilon/2))$ et $x \in C$ on a $x \in C_i$ pour au moins un i; alors $gx \in B(fx_i,\varepsilon/2)$ en en particulier $d(fx,gx) \leqslant d(fx,fx_i) + d(fx_i,gx) < \varepsilon$. Ça montre que $\sup_{x\in C} d(fx,gx) < \varepsilon$ parce que le suprémum est en fait un maximum par compacité de C et continuité de f et g. □

Exercice 2. Soient X, Y des espaces topologiques.

(a) Si $A \subseteq X$ est fermé, alors $C(Y,A) \subseteq C_{\mathrm{co}}(Y,X)$ est fermé aussi.

(b) Pour X de Hausdorff et $Y \neq \varnothing$, l'inclusion par applications constantes

$$\mathrm{const}\colon X \to C_{\mathrm{co}}(Y,X)$$

est un plongement fermé.

Preuve. Ad (a):

$$C(Y,A) = \mathrm{Map}(Y,X) \setminus \left(\bigcup_{y\in Y} S(\{y\}, X \setminus A) \right).$$

Ad (b): L'application $\mathrm{const}\colon X \to \mathrm{Map}(Y,X)$ est continue, soit en observant que $\mathrm{const} = \mathrm{pr}_Y^\sharp$ et en utilisant exercice 4(c), soit par vérification directe: Si $K \subseteq Y$ est compact et $U \subseteq X$ ouvert,

$$\mathrm{const}^{-1} S(K,U) = \{x \in X \mid \mathrm{const}_x y = x \in U \text{ pour tout } y \in K\} = U.$$

L'application est fermée parce que si $A \subseteq X$ est fermé

$$\mathrm{Map}(Y,X) \setminus \mathrm{const}A = \{f \mid fY \not\subseteq A\} \cup \{f \mid \exists y,\, y' \in Y\colon fy \neq fy'\}.$$

Clairement, $\{f \mid fY \not\subseteq A\} = \operatorname{Map}(Y,X) \setminus C(Y,A)$ est ouvert par (a) et parce que X est de Hausdorff, on a de plus

$$\{f \mid \exists y,\, y' \in Y \colon fy \neq fy'\} = \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{y' \in Y \setminus \{y\}} \bigcup_{\substack{U \subseteq X \\ \text{ouvert}}} \bigcup_{\substack{U' \subseteq X \\ \text{ouvert} \\ U \cap U' = \varnothing}} S(\{y\},U) \cap S(\{y'\},U').$$

□

Exercice 3. Pour deux espaces topologiques X, Y, si $C(X,Y)$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que l'évaluation

$$\operatorname{ev} \colon C(X,Y) \times X \to Y,\ (f,x) \mapsto fx$$

est continue, montrer que la topologie compact ouvert est plus grossière que $\mathcal{T}$.

Preuve. Il faut montrer que pour $K \subseteq X$ compact et $W \subseteq Y$ ouvert, on a $S(K,W) \in \mathcal{T}$. Pour ça, il suffit de fixer $f \in S(K,W)$ et construir $U \in \mathcal{T}$ avec $f \in U \subseteq S(K,W)$. Par la continuité de ev par rapport à $\mathcal{T}$, on sait que pour tout $k \in K$, on trouve un voisinage ouvert $U \in \mathcal{T}$ de f et un voisinage ouvert $V \subseteq X$ de k tels que $\operatorname{ev}(U,V) \subseteq W$. En définissant

$$\mathcal{W} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T} \text{ avec } f \in U,\ V \subseteq X \text{ ouvert et } \operatorname{ev}(U,V) \subseteq W\},$$

les $\operatorname{pr}_2 \mathcal{W} = \{V \subseteq X \mid \exists U \in \mathcal{T} \colon U \times V \in \mathcal{W}\}$ forment un recouvrement ouvert de K et par compacité, on choisit un sous-recouvrement fini $V_1, \ldots, V_n$ aussi que $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ avec $U_i \times V_i \in \mathcal{W}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Maintenant, on pose $U := U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$, ce qui satisfait $f \in U$ et $U \subseteq S(K,W)$: Pour tout $k \in K$, on y trouve $i \in \{1, \ldots, n\}$ avec $k \in V_i$ et donc $\operatorname{ev}(U,k) \subseteq \operatorname{ev}(U_i,V_i) \subseteq W$. □

Exercice 4.

(a) Soient X, Y, Z trois ensembles. Comprendre "l'adjonction exponentielle" (i.e. montrer que c'est une bijection bien-définie)

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X,\ f \mapsto f^\sharp,\ g^\flat \leftarrow\!\shortmid g \quad \text{où} \quad (f^\sharp x)y := f(x,y) \quad \text{et} \quad g^\flat(x,y) := (gx)y$$

pour $f \colon X \times Y \to Z$, $g \colon X \to Z^Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

(b) Soient X, Y, Z des espaces topologiques avec Y localement compact. Montrer que la composition

$$C_{\mathrm{co}}(Y,Z) \times C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to C_{\mathrm{co}}(X,Z),\ (g,f) \mapsto g \circ f$$

est continue et conclure que l'évaluation $\operatorname{ev} \colon C_{\mathrm{co}}(Y,Z) \times Y \to Z$, $(g,y) \mapsto gy$ l'est aussi.

(c) Pour trois espaces topologiques X, Y, Z avec X et Y localement compact, montrer que l'adjonction exponentielle

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z))$$

du cours est en fait même un homéomorphisme

$$C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \cong C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)).$$

Preuve. Ad (a): Pour $f\colon X \times Y \to Z$ on calcule

$$(f^\sharp)^\flat(x,y) = (f^\sharp x)y = f(x,y) \qquad \text{pour tous } x \in X \text{ et } y \in Y.$$

Par contre, pour $g\colon X \to Z^Y$ on a

$$((g^\flat)^\sharp x)y = g^\flat(x,y) = (gx)y \qquad \text{pour tous } x \in X \text{ et } y \in Y.$$

Ad (b): Supposons que $g \circ f \in S(K,U)$, pour $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications continues. On va montrer qe'il existe un compact C de Y tel que $f(K) \subseteq C^\circ$ et $g(C) \subseteq U$. Il decoule alors que $(f,g) \in S(K,C^\circ) \circ S(C,U) \subseteq S(K,U)$.

Comme $f(K) \subseteq g^{-1}(U)$, et Y est localement compact, pour tout $k \in K$ il existe un voisinage compact C de $f(k)$ tel que

$$f(k) \in C^\circ \subseteq C \subseteq g^{-1}(U) \subseteq Y.$$

Maintenant, l'image $f(K)$ est compacte, et donc les intérieurs d'un nombre fini de telles compactes C sont suffisants pour le recouvrir. Si on les note $C_1, \dots, C_k$, on a

$$f(K) \subseteq C_1^\circ \cup \dots C_k^\circ \subseteq (C_1 \cup \dots \cup C_k)^\circ \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_k \subset g^{-1}(U) \subseteq Y.$$

La réunion $C_1 \cup \dots \cup C_k$ est le compact voulu.
Ad (c): Montrons que l'application

$$\alpha := (-)^\sharp : C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \to C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)).$$

est continue. On peut utiliser deux fois la loi exponentielle, et on obtient les applications

$$\alpha^\flat : X \times C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \to C_{\mathrm{co}}(Y,Z).$$

$$(\alpha^\flat)^\flat : X \times Y \times C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \to Z.$$

C'est facile à voir que $(\alpha^\flat)^\flat$ est l'evaluation

$$\mathrm{ev} : X \times Y \times C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \to Z,$$

ce qui est continue, lorsque $X \times Y$ est un produit d'espaces localement compacts. Donc $\alpha^\flat$ et α le sont aussi.

Montrons que l'application

$$(-)^\flat := \beta : C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)) \to C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z).$$

est continue. On peut utiliser deux fois la loi exponentielle, et on obtient les applications

$$\beta^\flat : X \times Y \times C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)) \to Z.$$

$$(\beta^\flat)^\sharp : X \times C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)) \to C_{\mathrm{co}}(Y,Z). \qquad \square$$

C'est facile à voir que $(\beta^\flat)^\sharp$ est l'evaluation

$$\mathrm{ev} : X \times C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y,Z)) \to C_{\mathrm{co}}(Y,Z),$$

ce qui est continue, lorsque X est un espace localement compact. Donc $\beta^\flat$ et β le sont aussi.

TOPOLOGIE - SÉRIE 25

Exercice 1. Pour une famille d'espaces topologiques basés $(X_i, x_i)_{i\in I}$, montrer que

$$\pi_1\left(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\right) \cong \prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Preuve. On a que les deux projections

$$\mathrm{pr}_1 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0), \qquad \mathrm{pr}_2 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$$

induisent deux homomorphismes de groupes

$$\mathrm{pr}_{1*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0), \qquad \mathrm{pr}_{2*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$

et donc un homomorphisme de groupes

$$f := (\mathrm{pr}_{1*}, \mathrm{pr}_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

On va montrer que f est en effet un isomorphisme de groupes. La surjectivité est claire, car si $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $[\delta] \in \pi_1(Y, y_0)$, on a $f\big[(\gamma, \delta)\big] = \big([\gamma], [\delta]\big)$. Pour l'injectivité, soit $[\gamma] \in \operatorname{Ker} f$. Alors, on a deux homotopies $H_1\colon \mathrm{pr}_1 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{x_0}$ et $H_2\colon \mathrm{pr}_2 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{y_0}$, qui définissent l'homotopie

$$H := (H_1, H_2)\colon \gamma = (\mathrm{pr}_1 \circ\gamma, \mathrm{pr}_2 \circ\gamma) \simeq (\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}) = \varepsilon_{(x_0,y_0)}$$

et donc $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$. $\square$

Exercice 2. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ un *rétract* (i.e. il existe $r\colon X \to A$ continue avec $r|_A = \mathrm{id}_A$, ce que l'on appelle une *rétraction*). Montrer que pour tout $x \in A$ les morphismes

$$\pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

Preuve. Si jamais on a un diagramme commutatif d'applications ensembliste

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "r"] & \\ Y \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

(i.e. $r \circ s = \mathrm{id}_Y$) l'application s est injectif et r est surjectif. À savoir: si $sy = sy'$ alors $y = rsy = rsy' = y'$ et pour $y \in Y$ arbitraire, on a $rsy = y$. Dans notre cas, on a

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "r"] & \\ A \arrow[ur, hook, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"'] & & A \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1(-,x)}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(X,x) \arrow[dr, "r_*"] & \\ \pi_1(A,x) \arrow[ur, "s_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\pi_1(A,x)}"'] & & \pi_1(A,x) \end{tikzcd} .$$

Par l'obsérvation ci-dessus, s_* est injectif et r_* est surjectif. $\square$

Exercice 3. Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_c \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \simeq_c \gamma_1(\gamma_2\gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)}\gamma \simeq_c \gamma \simeq_c \gamma\varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma\bar{\gamma} \simeq_c \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}\gamma \simeq_c \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Preuve. Ad (a): Puisque pour tous t, $s \in I$ on a $(1-s)t + sft \leqslant (1-s) + s = 1$,

$$H\colon I \times I \to I,\ (t,s) \mapsto (1-s)t + sft$$

est bien défini et nous donne une homotopie des chemins $\mathrm{id}_I \simeq f$, ce qui implique $\gamma \simeq \gamma \circ f$.
Ad (b): Soit X un espace topologique et γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon I \to X$ trois chemins tels que $\gamma_1 1 = \gamma_2 0$ et $\gamma_2 1 = \gamma_3 0$. Pour l'associativité on doit montrer que les deux chemins

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \in [0,1/4] \\ \gamma_2(4t-1) & t \in [1/4,1/2] \\ \gamma_3(2t-1) & t \in [1/2,1], \end{cases} \qquad \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(4t-2) & t \in [1/2,3/4] \\ \gamma_3(4t-3) & t \in [3/4,1] \end{cases}$$

sont homotopes. Pour le faire, on considère la reparamétrisation

$$r\colon I \to I,\ t \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0,1/4] \\ t + 1/4 & t \in [1/4,1/2] \\ (t+1)/2 & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

qui satisfait $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3) \circ r = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$.
Ad (c): Pour l'élément neutre, on prend un chemin γ et

$$r_1\colon I \to I,\ t \mapsto \min\{2t, 1\} \qquad \text{et} \qquad r_2\colon I \to I,\ t \mapsto (t+1)/2$$

pour obtenir $\gamma \circ r_1 = \gamma\varepsilon_{\gamma 1}$ et $\gamma \circ r_2 = \varepsilon_{\gamma 0}\gamma$.
Ad (d): Finalement, pour l'inverse γ^{-1} d'un chemin γ,

$$H\colon I \times I \to X,\ (t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \leqslant (1-s)/2 \\ \gamma(1-s) & \text{sinon} \\ \gamma(2-2t) & t \geqslant (1+s)/2 \end{cases}$$

définit une homotopie $\gamma\gamma^{-1} \simeq \varepsilon_{\gamma 0}$. □

Exercice 4. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$, dont les deux possèdent une unité (i.e. ils existent e, $f \in X$ avec $e \cdot x = x \cdot e = x$ et $f * x = x * f = x$ pour tout $x \in X$) et qui vérifient la *loi d'échange*

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a,\ b,\ c,\ d \in X.$$

Montrer que les deux unités aussi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Preuve. Ad (a): Montrons d'abord que $e = f$:

$$e = e \cdot e = (e * f) \cdot (f * e) = (e \cdot f) * (f \cdot e) = f * f = f.$$

Puis, montrons que les deux opérations coïncident: Pour a, $b \in X$ on calcule

$$a \cdot b = (a * e) \cdot (e * b) = (a \cdot e) * (e \cdot b) = a * b.$$

Pour l'associativité, on prend $b = e$ dans la loi d'échange et pour la commutativité on prend $a = d = e$.

Ad (b): Pour un groupe topologique, on a deux opérations sur l'ensemble $\pi_1(G, e)$:

$$[\gamma] * [\delta] := [\gamma * \delta] \qquad \text{et} \qquad [\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma \cdot \delta]$$

où $(\gamma \cdot \delta)(t) := \gamma(t) \cdot \delta(t)$ (multiplication dans le groupe topologique). L'opération "$\cdot$" est bien-défini, car si $H\colon \gamma \simeq_c \gamma'$, alors

$$I \times I \to X,\ (t, s) \mapsto H(t, s) \cdot \delta(t)$$

est une homotopie $\gamma \cdot \delta \simeq_c \gamma' \cdot \delta$ et similairement pour $\delta \simeq_c \delta'$. Maintenant, pour quatre lacets γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 en e, on vérifie facilement que

$$(\gamma_1 * \gamma_2) \cdot (\gamma_3 * \gamma_4) = (\gamma_1 \cdot \gamma_3) * (\gamma_2 \cdot \gamma_4)$$

(vraiment égaux, pas seulement homotope). □

TOPOLOGIE - SÉRIE 26

Exercice 1. Pour un espace topologique basé (X, x), montrer que $\pi_1(X, x)$ est abélien si et seulement si pour tout point $y \in X$ et touts chemins γ, δ de x vers y, les isomorphismes induits

$$\hat{\gamma},\ \hat{\delta} \colon \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, y)$$

coïncident.

Preuve. [$\Longrightarrow$] En supposant l'abélianité de $\pi_1(X, x)$, on va montrer que l'homomorphisme induite par γ et δ, ce qui sont deux lacets de x, coincident. Pour α un lacet de x, on calcule l'image par rapport à $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$.

$$\hat{\gamma}([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\gamma] = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\varepsilon_x] \star [\gamma] = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] \star [\delta]^{-1} \star [\gamma] =$$

$$= [\delta]^{-1} \star [\gamma] \star [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] = [\delta]^{-1} \star [\varepsilon_x] \star [\alpha] \star [\delta] = [\delta]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] = \hat{\delta}([\alpha]).$$

[$\Longleftarrow$] En supposant que tous les homomorphismes induites par un lacet de x coincident, on va montrer l'abélianité de $\pi_1(X, x)$. Pour α et β deux lacets de x, on a que

$$[\alpha] = [\varepsilon_x]^{-1} \star [\alpha] \star [\varepsilon_x] = \hat{\varepsilon_x}([\alpha]) = \hat{\beta}([\alpha]) = [\beta]^{-1} \star [\alpha] \star [\beta],$$

d'où il decoule que $[\beta] \star [\alpha] = [\alpha] \star [\beta]$.

Exercice 2. (défi) Pour deux applications continues f, $g \colon X \to Y$ qui sont homotopes par une homotopie $H \colon f \simeq g$, montrer que le diagramme

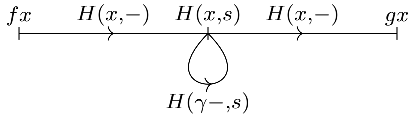
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, fx) \arrow[dd, "\widehat{H(x,-)}"] \\
\pi_1(X, x) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, gx)
\end{tikzcd}$$

commute pour tout point de base $x \in X$.

Preuve. Il faut montrer que pour tout lacet γ en x, on a

$$\overline{H(x, -)} * f\gamma * H(x, -) = g\gamma \qquad \text{ou} \qquad f\gamma * H(x, -) = H(x, -) * g\gamma.$$

Géométriquement, le chemin $f\gamma * H(x, -)$ parcourt d'abord le lacet $f\gamma$ et après le chemin $H(x, -)$ tandis que $H(x, -) * g\gamma$ parcourt d'abord le chemin $H(x, -)$ et après le lacet $g\gamma$. En notant que $f\gamma = H(\gamma-, 0)$ et $g\gamma = H(\gamma-, 1)$, l'idée pour la construction d'une homotopie de chemins $H' \colon f\gamma * H(x, -) \simeq_c H(x, -) * g\gamma$ est de pousser le trajet du lacet le long du chemin $H(x, -)$.



Formellement, en identifiant $I \cong [0, 2]$ pour faciliter la notation, l'homotopie H' est donné par

$$H' \colon [0, 2] \times I \to Y,\ (t, s) \mapsto \begin{cases} H(x, t) & t \leqslant s \\ H(\gamma(t - s), s) & t \in [s, s + 1] \\ H(x, t - 1) & t \in [s + 1, 2]. \end{cases}$$

En subdivisant $[0,2]\times I$ en trois parties fermées

$$[0,2]\times I = \{(t,s) \mid t\leqslant s\}\cup\{(t,s)\mid t\in[s,s+1]\}\cup\{(t,s)\mid t\in[s+1,2]\},$$

cette application est continue par le lemme de recollement. Finalement, on a

$$H(0,s)=H(x,0)=fx,\quad H(2,s)=H(x,1)=gx\quad\text{pour tout } s\in I$$

et

$$H'(t,0)=\begin{cases}H(\gamma t,0)=f\gamma t & t\leqslant 1\\ H(x,t-1) & t\geqslant 1,\end{cases}\qquad H'(t,1)=\begin{cases}H(x,t) & t\leqslant 1\\ H(\gamma(t-1),1)=g\gamma(t-1) & t\geqslant 1.\end{cases}$$

Alors, H' est bien une homotopie de chemins $f\gamma * H(x,-)\simeq_c H(x,-)*g\gamma$. □

Exercice 3. Un espace topologique $X\neq\varnothing$ est appelé *contractile* ssi l'identité $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ est homotope à une application constante.

(a) Montrer qu'un espace contractile X est simplement connexe.

(b) Rappelons que $S\subseteq\mathbb{R}^n$ est appelé une *partie étoilée par rapport à* $x\in S$ ssi pour tout $y\in S$ le segment $[x,y]:=\{ty+(1-t)x\mid t\in I\}$ est inclus dans S. Montrer qu'une partie étoilée (par rapport à un point) est contractile.

Preuve. Ad (a): Soit $x\in X$ tel qu'on y trouve une homotopie $H\colon \mathrm{const}_x\simeq\mathrm{id}_X$. L'espace X est connexe par arcs, car si $y\in X$, $H(y,-)\colon I\to X$ est un chemin $x\rightsquigarrow y$. De plus, $\pi_1(X,x)\cong 0$ par exercice 2. À savoir, en posant $f:=\mathrm{const}_x$ et $g:=\mathrm{id}_X$ dans l'exercice 2, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,x,) \arrow[d, "\widehat{H(x,-)}"] \\ \pi_1(X,x) \arrow[ur, "f_*=0"] \arrow[r, "g_*=\mathrm{id}"'] & \pi_1(X,x) \end{tikzcd},$$

ce qui implique que $0\colon\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,x)$ est injectif (cf. série 25, exercice 2).

Ad (b): Soit $S\subseteq\mathbb{R}^n$ étoilée par rapport à un point $x\in S$. Donc

$$H\colon S\times I\to S,\ (y,t)\mapsto ty+(1-t)x$$

est une homotopie bien-définie $\mathrm{const}_x\simeq\mathrm{id}_S$. □

Exercice 4.

(a) Pour deux revêtements $p\colon E\to B$, $p'\colon E'\to B'$, montrer que l'application produit $p\times p'\colon E\times E'\to B\times B'$ est un revêtement aussi.

(b) Soit $p\colon E\to B$ un revêtement et $A\subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p\colon p^{-1}A\to A$ est un revêtement aussi.

- Soient $p:E\to B$ and $p':E'\to B'$ deux récouvrements. On va montrer que leur produit $p\times p':E\times E'\to B\times B'$ l'est aussi.
  Soit $(b,b')\in B\times B'$, et U et U' deux voisinages ouverts trivializants de b et b' réspectivement. On peut écrir $p^{-1}(U)=\bigcup_{i\in I}U_i$, $(p')^{-1}(U')=\bigcup_{i'\in I'}U_i$, où, pour tous $i\in I$, $i'\in I'$, U_i et U_i' sont des ouverts tels que $U\cong U_i\cong U_{i'}$. Alors $U\times U'$ est un ouvert trivializant pour (b,b'). En fait, on a que

$$(p\times p')^{-1}(U\times U')=p^{-1}(U)\times p'^{-1}(U')=(\bigcup_{i\in I}U_i)\times(\bigcup_{i'\in I'}U'_{i'})=\bigcup_{(i,i')\in I\times I'}(U_i\times U'_{i'});$$

  ensuite, $U_i\times U'_{i'}\cong U\times U'$ pour tout $(i,i')\in I\times I'$.

- Soit $p : E \to B$ un recouvrement, et $A \subseteq B$. On va montrer que $p' := p|^{A}_{p^{-1}(A)} \to A$ l'est aussi.

  Soit $a \in A$, et U un voisinage ouvert trivializant pour a dans X. On peut écrir $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, où, pour tous $i \in I$, U_i est un ouvert tel que $U \cong U_i$. Alors $U' := U \cap A$ est un ouvert trivializant pour a dans A. En fait, on a que

  $$p'^{-1}(U') = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap p^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap p^{-1}(A));$$

  ensuite, p envoie $U_i \cap p^{-1}(A)$ sûr $U \cap A = U'$ homéomorphiquement.

TOPOLOGIE - SÉRIE 27

Exercice 1. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si B est discret, une application continue et surjective $p\colon E \to B$ est un revêtement si et seulement si E est discret.

(b) Quel sont les revêtements de B si B est muni de la topologie grossière?

Solution. (a) Soit $p\colon E \to B$ une application continue et surjective, où B est un espace dicret.

[$\Longleftarrow$] On va montrer que, si E est discret, alors p ets un revêtement. Soit $x \in B$. Alors $\{x\}$ est un voisinage ouver pour x et $p^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \{y\}$, ce qui est un réunion de ouverts de E, chaqun homéomorphe à $\{x\}$ lorsqu'on restreint p.

[$\Longrightarrow$] On va montrer que, si p ets un revêtement, alors E est discret. Soit $y \in E$. Alors il existe un voisinage ouvert U de y tel que $p|_U$ est un homéomorphisme sûr l'image, ce qui est discrète. Donc U est discret et ouvert, et $\{y\}$ est ouvert dans E.

(b) Lorsque B est un espace muni de la topologie grossière, les seules revêtements sont de la forme suivante:

$$p\colon \coprod_{i \in I} B \to B,$$

où la réunion est disjointe et sûr chaque terme p est l'identité.

En fait, une application d'une telle forme est continue et B est un ouvert trivializant pour n'importe quel point.

De l'autre cotê, pour n'importe quel point $b \in B$, B n'est que le seul voisinage et comme p est un revêtement il faut qu'il soit de la forme

$$p\colon \coprod_{i \in I} B \to B.$$

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'application quotient $S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement.

Preuve. Soit $[P] \in \mathbb{P}^n$, où $P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, et $x_{n+1} > 0$. Posons

$$U := p(\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| > \frac{x_{n+1}}{2}\}) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Cet U est un voisinage ouvert de P, et

$$p^{-1}(U) = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| > \frac{x_{n+1}}{2}\} =$$

$$= \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} > \frac{x_{n+1}}{2}\} \cup \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} < -\frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n.$$

Si on appelle V_+ et V_- les deux facteurs de cette réunion, ce qui sont ouverts dans $\mathbb{S}^n$, on a que

$$\overline{V_+} := \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n,$$

$$\overline{V_-} := \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} \leq -\frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n,$$

tandis que

$$\overline{U} := p(\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| \geq \frac{x_{n+1}}{2}\}) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Ensuite, $p|_{\overline{V_+}}^{\overline{U}}$ est un homéomorphisme car elle est bijective, $\mathbb{S}^n$ est de Hausdorff et $\overline{V}_+$ est compact. Donc $p|_{V_+}^{U}$ est un homéomorphisme. Le même argument vaut pour V_-. □

Exercice 3. Montrer que

(a) si X est un espace topologique et U, $V \subseteq X$ deux ouverts simplement connexes tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V \neq \varnothing$ connexe par arcs, alors X est simplement connexe;
Indication: Si $\gamma\colon I \to X$ est un lacet, choisir un nombre de Lebesgue pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I.

(b) les sphères S^n sont simplement connexes pour $n > 1$.

Preuve. Ad (a): Clairement, X est connexe par arcs parce qu'il est la réunion de deux sous-espaces connexes par arcs dont l'intersection est non-vide. En choisissant un point de base $x \in U \cap V$, il reste à montrer que tout lacet $\gamma\colon I \to X$ en x est homotope au chemin constant. En trouvant un nombre de Lebesgue δ pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I, choisissant $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \delta$ et en définissant $t_i := i/n$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ on obtient

$$I = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n]$$

dont chaque $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ est contenu dans U ou V. Sans perte de généralité, on suppose que si $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subseteq U$ (resp. V) alors $\gamma[t_{i+1}, t_{i+2}] \subseteq V$ (resp. U). Sinon, on simplement enlève $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ et remplace $[t_i, t_{i+1}]$ par $[t_i, t_{i+2}]$. En particulier, il suit que $t_i \in U \cap V$ pour tout i et on choisit, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un chemin

$$\alpha_i\colon I \to U \cap V \qquad \text{de } \gamma t_i \text{ vers } x$$

(ce qui existe parce que $U \cap V$ est connexe par arcs). En écrivant

$$\gamma_i\colon I \cong [t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\gamma} X \qquad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\},$$

on trouve

$$[\gamma] = [\gamma_1][\gamma_2]\ldots[\gamma_n] = \underbrace{[\gamma_1][\alpha_1]}_{[\varepsilon_x]}\underbrace{[\bar{\alpha}_1][\gamma_2][\alpha_2]}_{[\varepsilon_x]}\ldots\underbrace{[\bar{\alpha}_{n-1}][\gamma_n]}_{[\varepsilon_x]} = [\varepsilon_x]$$

parce que U et V sont simplement connexes.

Ad (b): En choisissant deux points distincts $N, S \in S^n$, les ouverts $U := S^n \backslash \{N\}$ et $V := S^n \backslash \{S\}$ satisfont les hypothèses du point (a). □

Exercice 4. Montrer qu'un revêtement $p\colon E \to B$ est un quotient propre si et seulement s'il est fini (i.e. les fibres sont finis).
Indication: $p\colon E \to B$ est fermée ssi pour tout $x \in B$ et tout ouvert $U \subseteq E$ avec $p^{-1}x \subseteq U$ il existe $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$ (cf. l'indication pour l'exercice 4 de la série 17).

Preuve. "⇒": Vu que p est un revêtement, toutes les fibres $p^{-1}x$ sont discrètes. Alors, elles sont compactes ssi finies.

"⇐": Parce que les fibres sont finies (donc compactes) par hypothèse, il reste à monter que p est fermée. Maintenant, soient $x \in B$ et $U \subseteq E$ ouvert avec $p^{-1}x \subseteq U$. En utilisant le lemme ci-dessous, on doit construire $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$. Parce que p est un revêtement, il existe $W \subseteq B$ ouvert tel que

$$x \in W, \qquad p^{-1}W = \coprod_{i=0}^{n} W_i \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad W_i \cong W \text{ par } p.$$

En posant $V := \bigcap_{i=0}^{n} p(U \cap W_i)$ (ce qui est un voisinage ouvert der x parce que p est ouverte), on calcule

$$p^{-1}V = \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap p^{-1}V) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap p^{-1}p(U \cap W_i)) = \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap U) \subseteq U,$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé que $p\colon W_i \cong W$ est un homéomorphisme. □

Lemme. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. Si, pour tout $y \in Y$ et tout ouvert $U \subseteq X$ contenant $f^{-1}y$, on y trouve un voisinage ouvert $V \subseteq Y$ de y avec $f^{-1}V \subseteq U$, alors f est fermée.

Preuve. Soit $A \subseteq X$ fermé, $U := X \setminus A$ et $y \in Y \setminus fA$ quelconque. Par hypothèse, on y trouve un voisinage ouvert $V \subseteq Y$ de y avec $f^{-1}V \subseteq U = X \setminus A$ et donc $A \cap f^{-1}V = \varnothing$. Mais ça veut dire que $V \subseteq Y \setminus fA$ et parce que, $y \in Y \setminus fA$ était arbitraire, $Y \setminus fA$ est ouvert. $\square$