TOPOLOGIE - SÉRIE 27

Exercice 1. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si B est discret, une application continue et surjective $p\colon E \to B$ est un revêtement si et seulement si E est discret.

(b) Quel sont les revêtements de B si B est muni de la topologie grossière?

Solution. (a) Soit $p\colon E \to B$ une application continue et surjective, où B est un espace dicret.

[$\Longleftarrow$] On va montrer que, si E est discret, alors p ets un revêtement. Soit $x \in B$. Alors $\{x\}$ est un voisinage ouver pour x et $p^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{y\in p^{-1}(x)}\{y\}$, ce qui est un réunion de ouverts de E, chaqun homéomorphe à $\{x\}$ lorsqu'on restreint p.

[$\Longrightarrow$] On va montrer que, si p ets un revêtement, alors E est discret. Soit $y \in E$. Alors il existe un voisinage ouvert U de y tel que $p|_U$ est un homéomorphisme sûr l'image, ce qui est discrète. Donc U est discret et ouvert, et $\{y\}$ est ouvert dans E.

(b) Lorsque B est un espace muni de la topologie grossière, les seules revêtements sont de la forme suivante:

$$p\colon \coprod_{i\in I} B \to B,$$

où la réunion est disjointe et sûr chaque terme p est l'identité.

En fait, une application d'une telle forme est continue et B est un ouvert trivializant pour n'importe quel point.

De l'autre cotê, pour n'importe quel point $b \in B$, B n'est que le seul voisinage et comme p est un revêtement il faut qu'il soit de la forme

$$p\colon \coprod_{i\in I} B \to B.$$

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'application quotient $S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement.

Preuve. Soit $[P] \in \mathbb{P}^n$, où $P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, et $x_{n+1} > 0$. Posons

$$U := p(\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| > \frac{x_{n+1}}{2}\}) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Cet U est un voisinage ouvert de P, et

$$p^{-1}(U) = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| > \frac{x_{n+1}}{2}\} =$$

$$= \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} > \frac{x_{n+1}}{2}\} \cup \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} < -\frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n.$$

Si on appelle V_+ et V_- les deux facteurs de cette réunion, ce qui sont ouverts dans $\mathbb{S}^n$, on a que

$$\overline{V_+} := \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n,$$

$$\overline{V_-} := \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} \leq -\frac{x_{n+1}}{2}\} \subseteq \mathbb{S}^n,$$

tandis que

$$\overline{U} := p(\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y_{n+1}| \geq \frac{x_{n+1}}{2}\}) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Ensuite, $p|_{\overline{V_+}}^{\overline{U}}$ est un homéomorphisme car elle est bijective, $\mathbb{S}^n$ est de Hausdorff et $\overline{V}_+$ est compact. Donc $p|_{V_+}^{U}$ est un homéomorphisme. Le même argument vaut pour V_-. □

Date: 5 juin 2014

Exercice 3. Montrer que

(a) si X est un espace topologique et U, $V \subseteq X$ deux ouverts simplement connexes tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V \neq \varnothing$ connexe par arcs, alors X est simplement connexe;
Indication: Si $\gamma\colon I \to X$ est un lacet, choisir un nombre de Lebesgue pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I.

(b) les sphères S^n sont simplement connexes pour $n > 1$.

Preuve. Ad (a): Clairement, X est connexe par arcs parce qu'il est la réunion de deux sous-espaces connexes par arcs dont l'intersection est non-vide. En choisissant un point de base $x \in U \cap V$, il reste à montrer que tout lacet $\gamma\colon I \to X$ en x est homotope au chemin constant. En trouvant un nombre de Lebesgue δ pour le recouvrement ouvert $\{\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V\}$ de I, choisissant $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \delta$ et en définissant $t_i := i/n$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ on obtient

$$I = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n]$$

dont chaque $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ est contenu dans U ou V. Sans perte de généralité, on suppose que si $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subseteq U$ (resp. V) alors $\gamma[t_{i+1}, t_{i+2}] \subseteq V$ (resp. U). Sinon, on simplement enlève $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ et remplace $[t_i, t_{i+1}]$ par $[t_i, t_{i+2}]$. En particulier, il suit que $t_i \in U \cap V$ pour tout i et on choisit, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un chemin

$$\alpha_i\colon I \to U \cap V \qquad \text{de } \gamma t_i \text{ vers } x$$

(ce qui existe parce que $U \cap V$ est connexe par arcs). En écrivant

$$\gamma_i\colon I \cong [t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\gamma} X \qquad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\},$$

on trouve

$$[\gamma] = [\gamma_1][\gamma_2]\dots[\gamma_n] = \underbrace{[\gamma_1][\alpha_1]}_{[\varepsilon_x]}\underbrace{[\bar{\alpha}_1][\gamma_2][\alpha_2]}_{[\varepsilon_x]}\dots\underbrace{[\bar{\alpha}_{n-1}][\gamma_n]}_{[\varepsilon_x]} = [\varepsilon_x]$$

parce que U et V sont simplement connexes.

Ad (b): En choisissant deux points distincts $N, S \in S^n$, les ouverts $U := S^n \backslash \{N\}$ et $V := S^n \backslash \{S\}$ satisfont les hypothèses du point (a). □

Exercice 4. Montrer qu'un revêtement $p\colon E \to B$ est un quotient propre si et seulement s'il est fini (i.e. les fibres sont finis).
Indication: $p\colon E \to B$ est fermée ssi pour tout $x \in B$ et tout ouvert $U \subseteq E$ avec $p^{-1}x \subseteq U$ il existe $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$ (cf. l'indication pour l'exercice 4 de la série 17).

Preuve. "$\Rightarrow$": Vu que p est un revêtement, toutes les fibres $p^{-1}x$ sont discrètes. Alors, elles sont compactes ssi finies.

"$\Leftarrow$": Parce que les fibres sont finies (donc compactes) par hypothèse, il reste à monter que p est fermée. Maintenant, soient $x \in B$ et $U \subseteq E$ ouvert avec $p^{-1}x \subseteq U$. En utilisant le lemme ci-dessous, on doit construire $V \subseteq B$ ouvert tel que $x \in V$ et $p^{-1}V \subseteq U$. Parce que p est un revêtement, il existe $W \subseteq B$ ouvert tel que

$$x \in W, \qquad p^{-1}W = \coprod_{i=0}^{n} W_i \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad W_i \cong W \text{ par } p.$$

En posant $V := \bigcap_{i=0}^{n} p(U \cap W_i)$ (ce qui est un voisinage ouvert der x parce que p est ouverte), on calcule

$$p^{-1}V = \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap p^{-1}V) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap p^{-1}p(U \cap W_i)) = \bigcup_{i=0}^{n}(W_i \cap U) \subseteq U,$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé que $p\colon W_i \cong W$ est un homéomorphisme. □

Lemme. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. Si, pour tout $y \in Y$ et tout ouvert $U \subseteq X$ contenant $f^{-1}y$, on y trouve un voisinage ouvert $V \subseteq Y$ de y avec $f^{-1}V \subseteq U$, alors f est fermée.

Preuve. Soit $A \subseteq X$ fermé, $U := X \setminus A$ et $y \in Y \setminus fA$ quelconque. Par hypothèse, on y trouve un voisinage ouvert $V \subseteq Y$ de y avec $f^{-1}V \subseteq U = X \setminus A$ et donc $A \cap f^{-1}V = \varnothing$. Mais ça veut dire que $V \subseteq Y \setminus fA$ et parce que, $y \in Y \setminus fA$ était arbitraire, $Y \setminus fA$ est ouvert. $\square$