TOPOLOGIE - SÉRIE 26

Exercice 1. Pour un espace topologique basé (X, x), montrer que $\pi_1(X, x)$ est abélien si et seulement si pour tout point $y \in X$ et touts chemins γ, δ de x vers y, les isomorphismes induits

$$\hat{\gamma},\ \hat{\delta}\colon \pi_1(X,x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,y)$$

coïncident.

Preuve. [$\Longrightarrow$] En supposant l'abélianité de $\pi_1(X, x)$, on va montrer que l'homomorphisme induite par γ et δ, ce qui sont deux lacets de x, coincident. Pour α un lacet de x, on calcule l'image par rapport à $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$.

$$\hat{\gamma}([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\gamma] = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\varepsilon_x] \star [\gamma] = [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] \star [\delta]^{-1} \star [\gamma] =$$
$$= [\delta]^{-1} \star [\gamma] \star [\gamma]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] = [\delta]^{-1} \star [\varepsilon_x] \star [\alpha] \star [\delta] = [\delta]^{-1} \star [\alpha] \star [\delta] = \hat{\delta}([\alpha]).$$

[$\Longleftarrow$] En supposant que tous les homomorphismes induites par un lacet de x coincident, on va montrer l'abélianité de $\pi_1(X, x)$. Pour α et β deux lacets de x, on a que

$$[\alpha] = [\varepsilon_x]^{-1} \star [\alpha] \star [\varepsilon_x] = \hat{\varepsilon_x}([\alpha]) = \hat{\beta}([\alpha]) = [\beta]^{-1} \star [\alpha] \star [\beta],$$

d'où il decoule que $[\beta] \star [\alpha] = [\alpha] \star [\beta]$.

Exercice 2. (défi) Pour deux applications continues $f, g\colon X \to Y$ qui sont homotopes par une homotopie $H\colon f \simeq g$, montrer que le diagramme

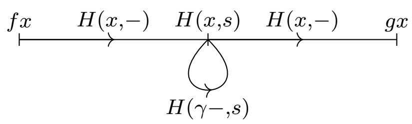
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, fx) \arrow[dd, "\widehat{H(x,-)}"] \\
\pi_1(X,x) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, gx)
\end{tikzcd}$$

commute pour tout point de base $x \in X$.

Preuve. Il faut montrer que pour tout lacet γ en x, on a

$$\overline{H(x,-)} * f\gamma * H(x,-) = g\gamma \qquad \text{ou} \qquad f\gamma * H(x,-) = H(x,-) * g\gamma.$$

Géométriquement, le chemin $f\gamma * H(x,-)$ parcourt d'abord le lacet $f\gamma$ et après le chemin $H(x,-)$ tandis que $H(x,-) * g\gamma$ parcourt d'abord le chemin $H(x,-)$ et après le lacet $g\gamma$. En notant que $f\gamma = H(\gamma-, 0)$ et $g\gamma = H(\gamma-, 1)$, l'idée pour la construction d'une homotopie de chemins $H'\colon f\gamma * H(x,-) \simeq_c H(x,-) * g\gamma$ est de pousser le trajet du lacet le long du chemin $H(x,-)$.



Formellement, en identifiant $I \cong [0, 2]$ pour faciliter la notation, l'homotopie H' est donné par

$$H'\colon [0,2] \times I \to Y,\ (t,s) \mapsto \begin{cases} H(x,t) & t \leqslant s \\ H\big(\gamma(t-s), s\big) & t \in [s, s+1] \\ H(x, t-1) & t \in [s+1, 2]. \end{cases}$$

Date: 5 juin 2014

En subdivisant $[0,2] \times I$ en trois parties fermées

$$[0,2] \times I = \{(t,s) \mid t \leqslant s\} \cup \{(t,s) \mid t \in [s,s+1]\} \cup \{(t,s) \mid t \in [s+1,2]\},$$

cette application est continue par le lemme de recollement. Finalement, on a

$$H(0,s) = H(x,0) = fx, \quad H(2,s) = H(x,1) = gx \quad \text{pour tout } s \in I$$

et

$$H'(t,0) = \begin{cases} H(\gamma t, 0) = f\gamma t & t \leqslant 1 \\ H(x, t-1) & t \geqslant 1, \end{cases} \qquad H'(t,1) = \begin{cases} H(x,t) & t \leqslant 1 \\ H(\gamma(t-1), 1) = g\gamma(t-1) & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors, H' est bien une homotopie de chemins $f\gamma * H(x,-) \simeq_c H(x,-) * g\gamma$. $\square$

Exercice 3. Un espace topologique $X \neq \varnothing$ est appelé *contractile* ssi l'identité $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ est homotope à une application constante.

(a) Montrer qu'un espace contractile X est simplement connexe.

(b) Rappelons que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé une *partie étoilée par rapport à* $x \in S$ ssi pour tout $y \in S$ le segment $[x,y] := \{ty + (1-t)x \mid t \in I\}$ est inclus dans S. Montrer qu'une partie étoilée (par rapport à un point) est contractile.

Preuve. Ad (a): Soit $x \in X$ tel qu'on y trouve une homotopie $H \colon \mathrm{const}_x \simeq \mathrm{id}_X$. L'espace X est connexe par arcs, car si $y \in X$, $H(y,-) \colon I \to X$ est un chemin $x \rightsquigarrow y$. De plus, $\pi_1(X,x) \cong 0$ par exercice 2. À savoir, en posant $f := \mathrm{const}_x$ et $g := \mathrm{id}_X$ dans l'exercice 2, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,x,) \arrow[dd, "\widehat{H(x,-)}"] \\ \pi_1(X,x) \arrow[ur, "f_*=0"] \arrow[dr, "g_*=\mathrm{id}"'] & \\ & \pi_1(X,x) \end{tikzcd},$$

ce qui implique que $0 \colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$ est injectif (cf. série 25, exercice 2).

Ad (b): Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ étoilée par rapport à un point $x \in S$. Donc

$$H \colon S \times I \to S,\ (y,t) \mapsto ty + (1-t)x$$

est une homotopie bien-définie $\mathrm{const}_x \simeq \mathrm{id}_S$. $\square$

Exercice 4.

(a) Pour deux revêtements $p \colon E \to B$, $p' \colon E' \to B'$, montrer que l'application produit $p \times p' \colon E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement aussi.

(b) Soit $p \colon E \to B$ un revêtement et $A \subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p \colon p^{-1}A \to A$ est un revêtement aussi.

- Soient $p : E \to B$ and $p' : E' \to B'$ deux récouvrements. On va montrer que leur produit $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ l'est aussi.
  Soit $(b,b') \in B \times B'$, et U et U' deux voisinages ouverts trivializants de b et b' réspectivement. On peut écrir $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, $(p')^{-1}(U') = \bigcup_{i' \in I'} U_i$, où, pour tous $i \in I$, $i' \in I'$, U_i et U'_i sont des ouverts tels que $U \cong U_i \cong U_{i'}$. Alors $U \times U'$ est un ouvert trivializant pour (b,b'). En fait, on a que

  $$(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') = (\bigcup_{i \in I} U_i) \times (\bigcup_{i' \in I'} U'_{i'}) = \bigcup_{(i,i') \in I \times I'} (U_i \times U'_{i'});$$

  ensuite, $U_i \times U'_{i'} \cong U \times U'$ pour tout $(i,i') \in I \times I'$.

- Soit $p : E \to B$ un recouvrement, et $A \subseteq B$. On va montrer que $p' := p|_{p^{-1}(A)}^{A} \to A$ l'est aussi.

  Soit $a \in A$, et U un voisinage ouvert trivializant pour a dans X. On peut écrir $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, où, pour tous $i \in I$, U_i est un ouvert tel que $U \cong U_i$. Alors $U' := U \cap A$ est un ouvert trivializant pour a dans A. En fait, on a que

  $$p'^{-1}(U') = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap p^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap p^{-1}(A));$$

  ensuite, p envoie $U_i \cap p^{-1}(A)$ sûr $U \cap A = U'$ homéomorphiquement.