TOPOLOGIE - SÉRIE 25

Exercice 1. Pour une famille d'espaces topologiques basés $(X_i, x_i)_{i \in I}$, montrer que

$$\pi_1\left(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\right) \cong \prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i).$$

Preuve. On a que les deux projections

$$\mathrm{pr}_1 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0), \qquad \mathrm{pr}_2 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$$

induisent deux homomorphismes de groupes

$$\mathrm{pr}_{1*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0), \qquad \mathrm{pr}_{2*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$

et donc un homomorphisme de groupes

$$f := (\mathrm{pr}_{1*}, \mathrm{pr}_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

On va montrer que f est en effet un isomorphisme de groupes. La surjectivité est claire, car si $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $[\delta] \in \pi_1(Y, y_0)$, on a $f\big[(\gamma, \delta)\big] = ([\gamma], [\delta])$. Pour l'injectivité, soit $[\gamma] \in \operatorname{Ker} f$. Alors, on a deux homotopies $H_1\colon \mathrm{pr}_1 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{x_0}$ et $H_2\colon \mathrm{pr}_2 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{y_0}$, qui définissent l'homotopie

$$H := (H_1, H_2)\colon \gamma = (\mathrm{pr}_1 \circ\gamma, \mathrm{pr}_2 \circ\gamma) \simeq (\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}) = \varepsilon_{(x_0,y_0)}$$

et donc $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$. □

Exercice 2. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ un *rétract* (i.e. il existe $r\colon X \to A$ continue avec $r|_A = \mathrm{id}_A$, ce que l'on appelle une *rétraction*). Montrer que pour tout $x \in A$ les morphismes

$$\pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

Preuve. Si jamais on a un diagramme commutatif d'applications ensembliste

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "r"] & \\ Y \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

(i.e. $r \circ s = \mathrm{id}_Y$) l'application s est injectif et r est surjectif. À savoir: si $sy = sy'$ alors $y = rsy = rsy' = y'$ et pour $y \in Y$ arbitraire, on a $rsy = y$. Dans notre cas, on a

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "r"] & \\ A \arrow[ur, hook, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"'] & & A \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1(-,x)}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(X,x) \arrow[dr, "r_*"] & \\ \pi_1(A,x) \arrow[ur, "s_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\pi_1(A,x)}"'] & & \pi_1(A,x) \end{tikzcd} .$$

Par l'obsérvation ci-dessus, s_* est injectif et r_* est surjectif. □

Date: 21 mai 2014

Exercice 3. Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_c \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \simeq_c \gamma_1(\gamma_2\gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)}\gamma \simeq_c \gamma \simeq_c \gamma\varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma\bar{\gamma} \simeq_c \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}\gamma \simeq_c \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Preuve. Ad (a): Puisque pour tous t, $s \in I$ on a $(1-s)t + sft \leqslant (1-s) + s = 1$,

$$H\colon I \times I \to I,\ (t,s) \mapsto (1-s)t + sft$$

est bien défini et nous donne une homotopie des chemins $\mathrm{id}_I \simeq f$, ce qui implique $\gamma \simeq \gamma \circ f$.
Ad (b): Soit X un espace topologique et γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon I \to X$ trois chemins tels que $\gamma_1 1 = \gamma_2 0$ et $\gamma_2 1 = \gamma_3 0$. Pour l'associativité on doit montrer que les deux chemins

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \in [0,1/4] \\ \gamma_2(4t-1) & t \in [1/4,1/2] \\ \gamma_3(2t-1) & t \in [1/2,1], \end{cases} \qquad \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(4t-2) & t \in [1/2,3/4] \\ \gamma_3(4t-3) & t \in [3/4,1] \end{cases}$$

sont homotopes. Pour le faire, on considère la reparamétrisation

$$r\colon I \to I,\ t \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0,1/4] \\ t + 1/4 & t \in [1/4,1/2] \\ (t+1)/2 & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

qui satisfait $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3) \circ r = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$.
Ad (c): Pour l'élément neutre, on prend un chemin γ et

$$r_1\colon I \to I,\ t \mapsto \min\{2t, 1\} \qquad \text{et} \qquad r_2\colon I \to I,\ t \mapsto (t+1)/2$$

pour obtenir $\gamma \circ r_1 = \gamma\varepsilon_{\gamma 1}$ et $\gamma \circ r_2 = \varepsilon_{\gamma 0}\gamma$.
Ad (d): Finalement, pour l'inverse γ^{-1} d'un chemin γ,

$$H\colon I \times I \to X,\ (t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \leqslant (1-s)/2 \\ \gamma(1-s) & \text{sinon} \\ \gamma(2-2t) & t \geqslant (1+s)/2 \end{cases}$$

définit une homotopie $\gamma\gamma^{-1} \simeq \varepsilon_{\gamma 0}$. □

Exercice 4. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$, dont les deux possèdent une unité (i.e. ils existent e, $f \in X$ avec $e \cdot x = x \cdot e = x$ et $f * x = x * f = x$ pour tout $x \in X$) et qui vérifient la *loi d'échange*

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a,\ b,\ c,\ d \in X.$$

Montrer que les deux unités aussi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Preuve. Ad (a): Montrons d'abord que $e = f$:

$$e = e \cdot e = (e * f) \cdot (f * e) = (e \cdot f) * (f \cdot e) = f * f = f.$$

Puis, montrons que les deux opérations coïncident: Pour a, $b \in X$ on calcule

$$a \cdot b = (a * e) \cdot (e * b) = (a \cdot e) * (e \cdot b) = a * b.$$

Pour l'associativité, on prend $b = e$ dans la loi d'échange et pour la commutativité on prend $a = d = e$.

Ad (b): Pour un groupe topologique, on a deux opérations sur l'ensemble $\pi_1(G, e)$:

$$[\gamma] * [\delta] := [\gamma * \delta] \qquad \text{et} \qquad [\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma \cdot \delta]$$

où $(\gamma \cdot \delta)(t) := \gamma(t) \cdot \delta(t)$ (multiplication dans le groupe topologique). L'opération "$\cdot$" est bien-défini, car si $H \colon \gamma \simeq_c \gamma'$, alors

$$I \times I \to X, \, (t, s) \mapsto H(t, s) \cdot \delta(t)$$

est une homotopie $\gamma \cdot \delta \simeq_c \gamma' \cdot \delta$ et similairement pour $\delta \simeq_c \delta'$. Maintenant, pour quatre lacets γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 en e, on vérifie facilement que

$$(\gamma_1 * \gamma_2) \cdot (\gamma_3 * \gamma_4) = (\gamma_1 \cdot \gamma_3) * (\gamma_2 \cdot \gamma_4)$$

(vraiment égaux, pas seulement homotope). $\square$