TOPOLOGIE - SÉRIE 22

Exercice 1. Soit $X \neq \varnothing$ un espace métrique complet et $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \to \mathbb{R}$ (i.e. les applications $X \to \mathbb{R}$ dont l'image est bornée) que l'on muni de la norme $\|f\| := \sup_{x \in X} |fx|$. En fixant un point $x_0 \in X$, montrer que $X \to B(X, \mathbb{R})$, $x \mapsto \varphi_x$ avec $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$ est un plongement isométrique.

Preuve. pour tout $x \in X$ on denote $\varphi_x(y) := d(y, x) - d(y, x_0)$, pour un $x_0 \in X$ fixé. Alors pour tout $x \in X$ la function $\varphi_x : x \to \mathbb{R}$ est bornée. En fait, à partir des inégalités

$$d(y, a) \leq d(y, b) + d(x, b)) \text{ et } d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b)),$$

on obtient

$$|d(y, x) - d(y, b)| \leq d(x, b)$$

et quand $b = x_0$ on peut conclure que pour tout $y \in X$ on a

$$|\varphi_x(y)| \leq d(x, x_0).$$

Il reste à montrer que $\varphi : x \in X \mapsto \varphi_x \in B(X, \mathbb{R})$ est une isométrie, c'est à dir

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = d(x, z).$$

En utilisant la definition de ρ, et les inégalité qu'on vient de voir, on a

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = \sup_{y \in X} |\varphi_x(y) - \varphi_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

De l'autre côté, cette inégalité devient stricte lorsqu'on considère $y = x$, et donc

$$\rho(\varphi_x, \varphi_z) = \sup_{y \in X} |\varphi_x(y) - \varphi_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, z)| \geq |d(x, x) - d(x, z)| = d(x, z).$$

Définition. Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ et l'inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ sont continus.

Exercice 2. Prouver que les suivants sont des groupes topologiques:

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve.

- On sait déjà que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe, et que la multiplication et l'inversion sont des applications continues par rapport à la topologie standard. Cela signifie que $(\mathbb{R}, +, \mathcal{T}_{st})$ est un groupe topologique.
- On sait déjà que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, et puisque la topologie sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est discrète, on a que la multiplication et l'inversion sont continues.

Date: 24 avril 2014

- La structure de groupe sur S^1, après avoir identifié $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, est la suivante:

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', yx' + xy') \in S^1 \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc, chaque composante utilise seulement l'addition, la différence et la multiplication de nombres réels, qu'on sait être continues. De plus, l'inversion peut être décrite par

$$(x, y)^{-1} := (x, -y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2,$$

ce qui est clairement une application continue. Cela veut dire que S^1 est un groupe topologique.

- On sait déjà que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Montrons que la multiplication et l'inversion sont continues par rapport à la topologie standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj},$$

qui est continue car la somme et le produit son continus. Donc la multiplication des matrices est continue par proprieté universelle de la topologie produit car chaque cordonnée est continue. On rappelle que le déterminant $\det : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue car c'est un polynome. On peut donc appliquer la regle de Cramer pour inverser les matrices:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T,$$

ou C est la matrice des cofacteurs de A définie par $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. Encore une fois, par la proprietée universelle de la topologie produit, on conclut que l'inversion est continue.

□

Exercice 3. Soit G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Montrer que

(a) $\overline{H} \subseteq G$ est aussi un sous-groupe;

(b) le quotient $G \twoheadrightarrow G/H$ est ouvert;

(c) si H est normal, $\overline{H}$ l'est aussi;

(d) si H est normal, G/H muni de la topologie quotient et de la multiplication induite de G est aussi un groupe topologique.

Preuve. Ad (a): On sait que $S \subseteq G$ est un sous-group si et seulement si $f(S \times S) \subseteq S$, où $f : G \times G \to G$ est l'application continue donnée par $f(g, g') = g^{-1} \cdot g'$. On a que

$$f(\overline{H} \times \overline{H}) = f(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{f(H \times H)} \subseteq \overline{H},$$

ce qui montre que l'adérence d'un sous-group l'est toujours.

Ad (b): Soit $U \subset X$ un ouvert. Il faut montrer que $q(U) \subseteq G/H$ est ouvert; i.e. que $q^{-1}(q(U)) \subseteq X$ l'est. Mais

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{u \in U} Hu = \bigcup_{h \in H} hU \subseteq X,$$

ce qui est ouvert parce que tout où hU l'est. En fait, pour tout $g \in G$, on a un homéomorphisme $l_g \colon G \to G$, défini par $g' \mapsto gg'$, avec inverse donnée par $l_{g^{-1}}$. En particulier, l_g est ouvert, et donc pour tout $U \subseteq G$ ouvert, on a que $g \cdot U = l_g(U)$ l'est aussi.

Ad (c): On sait que $S \subseteq G$ est un sous-group normal si et seulement si pour tout $g \in G$ on a $c_g(S) \subseteq S$, où $c_g : G \to G$ est l'application continue donnée par $f(g') = g^{-1} \cdot g' \cdot g$. On a que

$$c_g(\overline{H}) =\subseteq \overline{c_g(H)} \subseteq \overline{H},$$

ce qui montre que l'adérence d'un sous-group normal l'est toujours.

Ad (d): On sait que si le sous-group est normal, alors le quotient G/H a la structure d'un groupe. La multiplication et l'inverse sont les fonctionnes uniques telles que les diagrammes suivantes commutent:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "q\times q"] \arrow[d] & G/H \times G/H \arrow[d, dotted] \\ G \arrow[r, "q"'] & G/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "-1"'] & G/H \arrow[d, dotted] \\ G \arrow[r, "q"'] & G/H \end{tikzcd}.$$

Explicitement $(gH)(g'H) = (gg')H$ et $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Il reste que à vérifier la continuité de ces applications. En utilisant le lemme suivant et le point précédent, on a que l'application

$$G \times G \xrightarrow{q\times q} G/H \times G/H$$

est une application quotiente, car elle est surjective, ouverte et continue. On se souvient que pour un quotient $p\colon X \twoheadrightarrow X/{\sim}$, une application $f\colon X/{\sim} \to Y$ est continue ssi $f \circ p$ l'est. Dans notre cas, on obtient que la multiplication et l'inverse sur G/H sont vraiment continues. □

Lemme. Toute application surjective, continue et ouverte $p\colon X \twoheadrightarrow Y$ est un quotient.

Preuve. Il faut montrer que $V \subseteq Y$ est ouvert ssi $p^{-1}V \subseteq X$ l'est, où la direction "$\Rightarrow$" est la continuité de p. Par contre, si $p^{-1}V \subseteq X$ est ouvert, $V = pp^{-1}V$ par surjectivité, ce qui est ouvert par hypothèse. □

Exercice 4. Un *isomorphisme de groupes topologiques* entre deux groupes topologiques G, H est un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ qui est aussi un homéomorphisme.

(a) Soient G, H deux groupes topologiques et $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un morphisme de groupes qui est aussi continu, ouvert et surjectif. Alors, f factorise par le quotient $G/\operatorname{Ker} f$ et l'application induite $G/\operatorname{Ker} f \to H$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

(b) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ comme groupes topologiques.

Preuve. Ad (a): Puisque $f(\operatorname{Ker} f) = \{1\}$, l'application f factorise uniquement par le quotient $p\colon G \twoheadrightarrow G/\operatorname{Ker} f$ comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "f"'] & G/\operatorname{Ker} f \arrow[d, dotted, "\bar f"] \\ & H \end{tikzcd}.$$

L'application induite $\bar f$ est un isomorphisme de groupes par la surjectivité de f. Aussi, elle est continue par la propriété universelle de la topologie quotient. Finalement, elle est ouverte (resp. fermée), car pour $U \subseteq G/\operatorname{Ker} f$ être ouvert (resp. fermé) veut dire que $p^{-1}U \subseteq G$ est ouvert (resp. fermé) et donc on a que $\bar f U = \bar f pp^{-1}U = fp^{-1}U$ l'est aussi.

Ad (b): L'application $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{i2\pi x}$ est continue, ouverte et surjective et $\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$. Maintenant une application directe de (a) montre l'énoncé. □